

*Д-р техн. наук М. В. МАЛЫШЕВ*

### **ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ, ОСНОВАННОЕ НА ЛИНЕАРИЗАЦИИ ИСХОДНОГО УРАВНЕНИЯ**

Решение плоской задачи теории предельного равновесия сводится к интегрированию при заданных граничных условиях системы из трех уравнений—двух линейных дифференциальных уравнений равновесия и третьего нелинейного уравнения предельного равновесия. Первые два уравнения удовлетворяются тождественно, если прибегнуть к функции Д. Эри, частные производные второго порядка от которой по координатам равны напряжениям [3]. Подставляя эти производные в уравнение предельного равновесия, мы получаем одно существенно нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции напряжений, подлежащее разрешению. В связи с нелинейностью этого уравнения непосредственное интегрирование его удастся осуществить лишь для нескольких простейших случаев. Поэтому В. В. Соколовским [2] разработан эффективный численный метод решений указанной системы уравнений, являющейся системой гиперболического типа.

Если произвести линеаризацию системы уравнений предельного равновесия, то с введением функции напряжений мы получили бы одно дифференциальное уравнение второго порядка, также гиперболического

типа, которое при постоянных коэффициентах всегда, а при переменных коэффициентах в ряде случаев интегрируется в замкнутом виде.

Условие предельного равновесия Мора с прямолинейной огибающей предельных кругов

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \sin^2 \varphi (\sigma_x + \sigma_y + 2c \operatorname{ctg} \varphi)^2, \quad (1)$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  — компоненты напряжений;

$c$  — удельное сцепление;

$\varphi$  — угол внутреннего трения. С помощью введения понятия о приведенных напряжениях:

$$\bar{\sigma}_x = \sigma_x + c \operatorname{ctg} \varphi, \quad \bar{\sigma}_y = \sigma_y + c \operatorname{ctg} \varphi \quad (2)$$

может быть записано таким образом:

$$(\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \sin^2 \varphi (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y)^2. \quad (3)$$

В этом уравнении в явном виде не присутствует удельное сцепление, и, таким образом, дальнейшая задача как бы сводится к рассмотрению идеально сыпучей среды. Уравнение (3) после небольших тождественных преобразований приводится к следующему виду:

$$\bar{\sigma}_x [\bar{\sigma}_y (1 + \sin^2 \varphi) - \bar{\sigma}_x \cos^2 \varphi] + \bar{\sigma}_y [\bar{\sigma}_x (1 + \sin^2 \varphi) - \bar{\sigma}_y \cos^2 \varphi] - 4\tau_{xy} \tau_{xy} = 0. \quad (4)$$

Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_y (1 + \sin^2 \varphi) - \bar{\sigma}_x \cos^2 \varphi &= a_1; \\ \bar{\sigma}_x (1 + \sin^2 \varphi) - \bar{\sigma}_y \cos^2 \varphi &= a_2; \\ 4\tau_{xy} &= a_3, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

после чего перепишем уравнение (4) таким образом:

$$a_1 \bar{\sigma}_x + a_2 \bar{\sigma}_y - a_3 \tau_{xy} = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) является линейным относительно напряжений  $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \tau_{xy}$ , если считать коэффициенты  $a_1, a_2$  и  $a_3$  заданными.

Если использовать функцию Эри  $\psi$ , то уравнения равновесия удовлетворяются автоматически, а компоненты напряжений с помощью ее выражаются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \gamma x; \\ \bar{\sigma}_y &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \gamma x; \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где  $\gamma$  — объемный вес грунта.

После подстановки зависимостей (7) в уравнение (6) получаем неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка в общем случае с переменными коэффициентами

$$a_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + a_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = -(a_1 + a_2) \gamma x. \quad (8)$$

Уравнение (8) можно рассматривать как линейризованное уравнение предельного равновесия. Если коэффициенты  $a_1, a_2$  и  $a_3$  будут в точности определены выражениями (5), то уравнение (8) совпадет с исходным уравнением (1) и задача решается точно.

Если же коэффициенты (5), зависящие от самого решения задачи, считать заданными постоянными или переменными (в этом состоит приближенность решения), то задача решается не точно, причем уравнения равновесия будут удовлетворены тождественно, а условие предельного равновесия — приближенно.

Коэффициенты (5) могут быть удобно выражены с помощью подстановки, предложенной В. В. Соколовским [2]:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \sigma(1 + \sin \varphi \cos 2\omega_1); \\ \bar{\sigma}_y &= \sigma(1 - \sin \varphi \cos 2\omega_1); \\ \tau_{xy} &= \sigma \sin \varphi \sin 2\omega_1, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где  $\omega_1$  — угол, составленный направлением наибольшего главного напряжения и осью  $x$  (рис. 1, а). Таким образом:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 2\sigma \sin \varphi (\sin \varphi - \cos 2\omega_1); \\ a_2 &= 2\sigma \sin \varphi (\sin \varphi + \cos 2\omega_1); \\ a_3 &= 4\sigma \sin \varphi \sin 2\omega_1 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

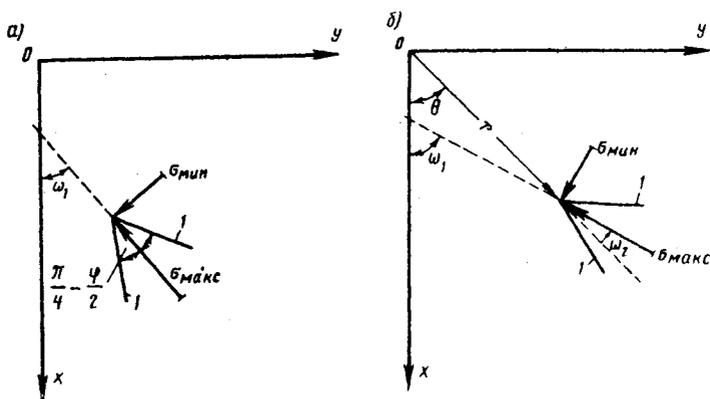


Рис. 1. Схема расположения координатных осей

а — прямоугольные координаты; б — полярные координаты; 1 — площадки скольжения

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{a_1}{a_3} &= \frac{\sin \varphi - \cos 2\omega_1}{2 \sin 2\omega_1} = C_1; \\ \frac{a_2}{a_3} &= \frac{\sin \varphi + \cos 2\omega_1}{2 \sin 2\omega_1} = A_1. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Подставляя полученные зависимости в уравнение (8), имеем

$$\frac{\sin \varphi + \cos 2\omega_1}{2 \sin 2\omega_1} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\sin \varphi - \cos 2\omega_1}{2 \sin 2\omega_1} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = - \frac{\sin \varphi}{\sin 2\omega_1} \gamma x \quad (12)$$

или в сокращенном виде

$$A_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + C_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = - \frac{\sin \varphi}{\sin 2\omega_1} \gamma x. \quad (13)$$

Уравнения (12) или (13) заменяют уравнение предельного равновесия, причем коэффициенты, зависящие от  $\varphi$  и  $\omega_1$ , принимаются по условиям задачи либо постоянными, если это возможно, либо функция-

ми координат, удовлетворяющими граничным условиям. В первом случае уравнение (12) всегда интегрируется в замкнутом виде, во втором, если этого сделать не представляется возможным, интегрирование ведется приближенно. Полное решение уравнения (12) в форме, предложенной Даламбером, при  $\omega_1 = \text{const}$ , как известно, имеет вид

$$\psi = \Phi_1(y - \alpha_1 x) + \Phi_2(y - \alpha_2 x) + \frac{(\sin\varphi + \cos 2\omega_1)\sin\varphi}{4\cos^2\varphi} (y - \alpha_1 x)(y - \alpha_2 x)\gamma x, \quad (14)$$

где

$$\alpha_{1,2} = \text{tg} \left[ \omega_1 \pm \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] = \frac{dy}{dx} \quad (15)$$

есть уравнение характеристик уравнения (12), являющихся линиями скольжения [2].

Из выражений (14) и (7) получим следующие зависимости для приведенных значений компонентов напряжений:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial (y - \alpha_1 x)^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial (y - \alpha_2 x)^2} + \gamma x \frac{2 + \sin\varphi \cos 2\omega_1 - \sin^2\varphi}{2\cos^2 2\omega_1}; \\ \bar{\sigma}_y &= \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial (y - \alpha_1 x)^2} \alpha_1^2 + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial (y - \alpha_2 x)^2} \alpha_2^2 + \\ &+ \frac{\sin^2\varphi - 3\sin\varphi \cos 2\omega_1 + 2}{2\cos^2\varphi} \gamma x - \frac{\sin\varphi \sin 2\omega_1}{\cos^2\varphi} \gamma y; \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial (y - \alpha_1 x)^2} \alpha_1 + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial (y - \alpha_2 x)^2} \alpha_2 - \gamma \frac{\sin\varphi \sin 2\omega_1}{\cos^2\varphi} \left( \frac{\sin\varphi + \cos 2\omega_1}{2\sin 2\omega_1} y - x \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнения (12), (13) могут быть решены также и методом Фурье, т. е. их интеграл представлен в силу линейности уравнения в виде

$$\psi = \sum_{i=0}^n X_i Y_i - \frac{\sin\varphi}{3(\sin\varphi + \cos 2\omega_1)} \gamma x^3,$$

где  $X_i = X_i(x)$ ;  $Y_i = Y(y)$  — функции, образующие решение уравнения (12), (13) без правой части.

Рассмотрим простейший случай постоянства коэффициентов уравнения (13)  $A_1$  и  $C_1$ , когда оно интегрируется просто и решение его можно представить в конечном виде. Следует отметить, что если коэффициенты  $A_1$  и  $C_1$  переменны, но зависят лишь от одной только координаты, то мы приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Решением рассматриваемого уравнения будет следующее выражение, полученное в предположении постоянства угла  $\omega_1$ :

$$\begin{aligned} \psi &= \sum D_i e^{\lambda_1 y + \lambda_2 x} + \frac{a_{20}}{2} x^2 - (A_1 a_{20} + C_1 a_{02}) xy + \frac{a_{02}}{2} y^2 + \\ &+ \frac{3(a_{30} A_1 - a_{03} C_1^2)}{1 - A_1 C_1} x^2 y - \frac{3(a_{03} C_1 - a_{30} A_1^2)}{1 - A_1 C_1} x y^2 + \\ &+ a_{03} y^3 + a_{30} x^3 - \frac{\sin\varphi}{3(\sin\varphi + \cos 2\omega_1)} \gamma x^3, \end{aligned} \quad (17)$$

где коэффициенты  $a_{02}$ ,  $a_{20}$ ,  $a_{30}$ ,  $a_{03}$  являются произвольными, определяемыми из граничных условий задачи. Из этих же условий определяются

коэффициенты  $D_i$  и  $\lambda_1$ . Коэффициент  $\lambda_2$  связан с последним условием

$$\lambda_2 = -\lambda_1 \frac{\sin 2\omega_1 \mp \cos \varphi}{\sin \varphi + \cos 2\omega_1}. \quad (18)$$

Решение уравнения (13) может быть найдено с помощью представления функции напряжений  $\psi$  в виде полинома, т. е.

$$\psi = \sum_{\substack{i=0, \dots, m \\ m=0, \dots, n}} a_{m-i+2, i} x^{m-i+2} y^i - \frac{\sin \varphi}{3(\sin \varphi + \cos 2\omega_1)} \gamma x^3. \quad (19)$$

В этом решении не все коэффициенты  $a_{m-i+2, i}$  являются независимыми, а на них накладываются условия, устанавливаемые приравнением нулю выражений при разных степенях переменных  $x$ ,  $y$ , получающихся после дифференцирования выражения (19) и подстановки в уравнение (12). Компоненты напряжений устанавливаются дифференцированием с применением формул (7). В тех случаях когда  $A_1$  и  $C_1$  переменны и интегрирование уравнения (13) точно выполнить не удается, можно применить приближенные приемы интегрирования, в частности метод подобластей, когда уравнение удовлетворяется в интегральном смысле в некоторой области, метод коллокации, когда уравнение удовлетворяется точно лишь в определенных точках, и метод наименьших квадратов, когда ставится условие минимизации квадрата невязки [1].

Аналогичные преобразования можно сделать и для полярных координат. Для этого случая в уравнениях (6) следует произвести замену  $\sigma_x$  на  $\sigma_r$ ,  $\sigma_y$  на  $\sigma_\theta$  и  $\tau_{xy}$  на  $\tau_{r\theta}$ . Вместо зависимостей (7) следует воспользоваться формулами:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \gamma r \cos \theta; \\ \bar{\sigma}_\theta &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \gamma r \cos \theta; \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Уравнение (8) превратится в такое:

$$\begin{aligned} a_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + a_1 \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) + a_3 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = \\ = - (a_1 + a_2) \gamma r \cos \theta. \end{aligned} \quad (21)$$

Зависимости (9) перейдут в следующие:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= \sigma (1 + \sin \varphi \cos 2\omega_2); \\ \bar{\sigma}_\theta &= \sigma (1 - \sin \varphi \cos 2\omega_2); \\ \tau_{r\theta} &= \sigma \sin \varphi \sin 2\omega_2. \end{aligned} \quad (22)$$

В выражениях (10) и (11) нужно  $\omega_1$  заменить на  $\omega_2$ . Смысл угла  $\omega_2$  ясен из рис. 1, б [2]. Уравнение (12) записывается в полярных координатах следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \varphi + \cos 2\omega_2}{2 \sin 2\omega_2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\sin \varphi - \cos 2\omega_2}{2 \sin 2\omega_2} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = - \frac{\sin \varphi}{\sin 2\omega_2} \gamma r \cos \theta \end{aligned} \quad (23)$$

или сокращенно по аналогии с уравнением (13), так:

$$A_2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + C_2 \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) = - \frac{\sin \varphi}{\sin 2\omega_2} \gamma r \cos \theta. \quad (2)$$

Уравнение линий скольжения в этом случае имеет вид [2]

$$\frac{dr}{d\theta} = r \operatorname{ctg} \left[ \omega_2 \pm \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right], \quad (2)$$

откуда

$$r = r_0 e^{\int \left[ \operatorname{ctg} \omega_2 \pm \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] d\theta}. \quad (2)$$

При  $\omega_2 = \text{const}$  получаем два семейства логарифмических спиралей.

Решение уравнения (23) или (24) целесообразно получить, используя метод Фурье. Будем искать решение этого уравнения, считая  $\omega_2 = \text{const}$ , в виде

$$\Psi = \sum_{i=2}^{\infty} D_i r^{i+2} e^{j\theta} + (S_1 \sin \theta + S_2 \cos \theta) \gamma r^3, \quad (2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= - \frac{\sin \varphi}{2 \sin 2\omega_2} \cdot \frac{1}{1 + (C_2 + 3A_2)^2}; \\ S_2 &= - \frac{\sin \varphi}{2 \sin 2\omega_2} \cdot \frac{C_2 + 3A_2}{1 + (C_2 + 3A_2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

или

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= - \frac{\sin \varphi \sin 2\omega_2}{2(1 + 4 \sin^2 \varphi + 4 \sin \varphi \cos 2\omega_2)}; \\ S_2 &= - \frac{(2 \sin \varphi + \cos 2\omega_2) \sin \varphi}{2(1 + 4 \sin^2 \varphi + 4 \sin \varphi \cos 2\omega_2)}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

а также

$$j_i = \frac{-(i+1) \pm \sqrt{(i+1)^2 - 4C_2(i+2)[A_2(i+1) + C_2]}}{2C_2}. \quad (3)$$

Практически большой интерес представляют значения  $j_i$  при  $i=0$  и  $i=1$ . Для  $i=0$  получаем

$$j_0 = \frac{\pm \sqrt{\sin^2 2\omega_2 - 4 \sin \varphi (\sin \varphi - \cos 2\omega_2) - \sin 2\omega_2}}{\sin \varphi - \cos 2\omega_2} \quad (3)$$

и для  $i=1$

$$j_1 = \frac{\pm \sqrt{4 - \cos^2 2\omega_2 - 9 \sin^2 \varphi + 6 \sin \varphi \cos 2\omega_2 - 2 \sin 2\omega_2}}{\sin \varphi - \cos 2\omega_2}. \quad (3)$$

В тех случаях когда  $\omega_2 \neq \text{const}$ , а является заданной функцией координат, и уравнение (23) точно не интегрируется, следует прибегать к приближенным приемам, о которых говорилось выше.

Рассмотрим пример применения предлагаемого решения с целью установления возникающих погрешностей. Чтобы сопоставить полу-

ченное приближенное решение с решением В. В. Соколовским, воспользуемся примером определения несущей способности основания в части напряженного состояния весомого клина — радиальной зоны Прандтля, рассмотренным в его книге [2] (стр. 67). Решение проведено для угла внутреннего трения  $\varphi=30^\circ$ , сцепления  $c=1 \text{ т/м}^2$  и объемного веса  $\gamma=1 \text{ т/м}^3$ . Нагрузка вдоль границы  $OM_0$  равна  $q=c \operatorname{ctg} \varphi=1,732 \text{ т/м}^2$  (рис. 2). Поскольку зона  $M_0OM_1$  является зоной максимально напряженного состояния, где напряжения определяются по Ренкину, то будем иметь для нее следующее распределение напряжений:

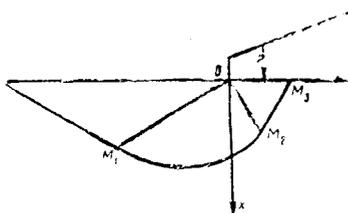


Рис. 2. К примеру расчета

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \\ \sigma_\theta &= \end{aligned} \right\} \frac{1}{1 - \sin \varphi} \{ (\gamma r \cos \theta + q) (1 \mp \sin \varphi \cos 2\theta) + c \cos \varphi (1 \mp \cos 2\theta) \};$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{1 - \sin \varphi} \{ (\gamma r \cos \theta + q) \sin \varphi + c \cos \varphi \} \sin 2\theta. \quad (33)$$

На луче  $OM_1$  при  $\theta = -\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$  получим, что

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \left[ \gamma r \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + q \right] \frac{1 + \sin^2 \varphi}{1 - \sin \varphi} + c \cos \varphi \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}; \\ \sigma_\theta &= \left[ \gamma r \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + q \right] (1 + \sin \varphi) + c \cos \varphi; \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \left\{ \left[ \gamma r \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + q \right] \sin \varphi + c \cos \varphi \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Далее по формулам (22) представляется возможным определить величину  $\omega_2$  на границе области радиального напряженного состояния  $OM_1$ . Так как

$$\operatorname{tg} 2\omega_2 = \frac{2\tau_{r\theta}}{\sigma_r - \sigma_\theta}, \quad (35)$$

то после преобразований получим, что для этого луча

$$\omega_2 = -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right). \quad (36)$$

Воспользоваться решениями (31) и (32) при этом значении  $\omega_2$  непосредственно не представляется возможным, так как они не дают решения, обращаясь в неопределенности. Поэтому следует в рассматриваемом случае обратиться непосредственно к уравнению (23), положив в нем  $\omega_2$  соответствующим зависимости (36). Преобразованное таким образом уравнение будет следующим:

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \operatorname{tg} \varphi + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = \gamma r \operatorname{tg} \varphi \cos \theta. \quad (37)$$

Это уравнение легко проинтегрировать методом Фурье и получить такое его решение:

$$\psi = \sum_{i=0}^m D_i r^{i+2} e^{\theta (i+2) \operatorname{tg} \varphi} + \frac{\gamma \operatorname{tg} \varphi}{2(1 + 9 \operatorname{tg}^2 \varphi)} (\sin \theta - 3 \operatorname{tg} \varphi \cos \theta) r^3. \quad (38)$$

Если воспользоваться формулами (20) для вычисления напряжений, то будем иметь:

$$\bar{\sigma}_r = \sum_{i=0}^m D_i (i+2) [1 + (i+2) \operatorname{tg}^2 \varphi] r^i e^{(i+2)\theta \operatorname{tg} \varphi} + \frac{\gamma r}{1+9 \operatorname{tg}^2 \varphi} [\operatorname{tg} \varphi \sin \theta + (1+6 \operatorname{tg}^2 \varphi) \cos \theta]; \quad (39)$$

$$\bar{\sigma}_\theta = \sum_{i=0}^m D_i (i+2)(i+1) r^i e^{(i+2)\theta \operatorname{tg} \varphi} + \frac{\gamma r}{1+9 \operatorname{tg}^2 \varphi} (3 \operatorname{tg} \varphi \sin \theta + \cos \theta);$$

$$\tau_{r\theta} = - \sum_{i=0}^m D_i (i+2)(i+1) r^i \operatorname{tg} \varphi e^{(i+2)\theta \operatorname{tg} \varphi} - \frac{\gamma r \operatorname{tg} \varphi}{1+9 \operatorname{tg}^2 \varphi} (\cos \theta + 3 \operatorname{tg} \varphi \sin \theta).$$

Для интересующих нас в рассматриваемом примере случаев  $i=0$  и  $i=1$  получим соответственно:

$$\sigma_r = 2D_0 (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi) e^{2\theta \operatorname{tg} \varphi} + 3D_1 (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \varphi) r e^{3\theta \operatorname{tg} \varphi} + \frac{\gamma r}{1+9 \operatorname{tg}^2 \varphi} [\operatorname{tg} \varphi \sin \theta + (1+6 \operatorname{tg}^2 \varphi) \cos \theta] - c \operatorname{ctg} \varphi;$$

$$\sigma_\theta = 2D_0 e^{2\theta \operatorname{tg} \varphi} + 6D_1 r e^{3\theta \operatorname{tg} \varphi} + \frac{\gamma r}{1+9 \operatorname{tg}^2 \varphi} (3 \operatorname{tg} \varphi \sin \theta + \cos \theta) - c \operatorname{ctg} \varphi;$$

$$\tau_{r\theta} = -2D_0 \operatorname{tg} \varphi e^{2\theta \operatorname{tg} \varphi} - 6D_1 r \operatorname{tg} \varphi e^{3\theta \operatorname{tg} \varphi} - \frac{\gamma r \operatorname{tg} \varphi}{1+9 \operatorname{tg}^2 \varphi} (3 \operatorname{tg} \varphi \sin \theta + \cos \theta). \quad (40)$$

Коэффициенты  $D_0$  и  $D_1$  устанавливаются после приравнения  $\sigma_\theta$  и  $\tau_{r\theta}$  из выражений (34) и (40) при значении  $\theta$ , соответствующем лучу  $OM_1$ , и с учетом зависимостей (2):

$$D_0 = \frac{1}{2} (1 + \sin \varphi) (q + c \operatorname{ctg} \varphi) e^{\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \operatorname{tg} \varphi};$$

$$D_1 = \frac{\gamma}{6} e^{3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \operatorname{tg} \varphi} \left\{ (1 + \sin \varphi) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{1}{1+9 \operatorname{tg}^2 \varphi} \left[ 3 \operatorname{tg} \varphi \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \right] \right\}. \quad (41)$$

С помощью выражений (40), (41) и (2) могут быть вычислены компоненты напряжений в весоном клине. Рассматриваемая задача была численно решена В. В. Соколовским для указанных выше значений параметров. Для них имеем  $D_0=4,353$ ,  $D_1=1,022$ , после чего получаем значения напряжений при любом значении  $\theta$  в следующем виде:

$$\sigma_\theta = 8,706 e^{1,154\theta} + 6,132 r e^{1,732\theta} + r (0,433 \sin \theta + 0,25 \cos \theta) - 1,732; \\ \tau_{r\theta} = - (0,577 \sigma_\theta + 1). \quad (42)$$

Результаты расчета для весоного клина, ограниченного углами, соответствующими радиальной зоне Прандтля, приведены в таблице, где даны также результаты численного решения по Соколовскому. Из таблицы следует, что в результате предположения значения  $\omega_2$ , равного начальному его значению, получены несколько завышенные значения касательных и несколько в меньшей степени нормальных напряжений. Разница объясняется тем, что в решение было введено предпо-

ложение о постоянстве угла  $\omega_2$  в пределах всей рассматривавшейся зоны, в то время как в действительности угол  $\omega_2$  переменен. Если же мы рассматривали бы задачу в предположении изменения угла  $\omega_2$ , то тогда расхождение в конечных результатах в  $\tau_{r\theta}$  удалось бы уменьшить.

Координаты		Напряжение в $\tau/\text{м}^2$			
$\theta^\circ$	$r, \text{м}$	по Соколовскому		по предлагаемому решению	
		$\sigma_\theta$	$\tau_{r\theta}$	$\sigma_\theta$	$\tau_{r\theta}$
-60	0	0,87	-1,50	0,87	-1,50
-60	2,50	2,74	-2,58	2,74	-2,58
-60	5	4,62	-3,67	4,62	-3,67
0	0	6,90	-4,98	6,90	-4,98
0	0,58	12,41	-6,88	10,68	-7,16
0	2,50	24,66	-12,51	22,93	-14,23
0	5,15	41,58	-20,08	39,84	-23,99
0	6,45	49,91	-26,30	48,14	-28,77
30	0	14,20	-9,19	14,20	-9,19
30	2,64	45,20	-22,59	55,45	-32,99
30	4,44	67,06	-30,02	83,58	-49,22
30	5,70	79,29	-34,35	103,27	-60,64

**Вывод.** Решение задач о предельном равновесии сыпучей среды может быть значительно упрощено и получено в замкнутой форме при введении линеаризованного относительно компонентов напряжений условия прочности грунта и использовании функции напряжений.

Такое упрощение является вполне приемлемым для инженерных расчетов и в то же время позволит получать конечные результаты в замкнутой форме.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. Физматгиз, 1963.
2. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды, изд. 3-е. Физматгиз, 1960.
3. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ, 1937.