Приближенное интегрирование линейных дифференциальных уравнений обобщенным методом Бубнова-Галеркина для задач механики грунтов

М. В. Малышев

В ряде случаев задачи механики грунтов приводят к необходимости решения дифференциальных уравнений при соответствующих краевых и начальных условиях—обыкновенных или в частных производных. Интегрирование этих уравнений часто представляет значительные трудности, так как точное решение получить иногда невозможно, а интегрирование численными методами требует значительного времени.

В этих случаях удобно применить приближенные методы интегрирования и, в частности, обобщенный метод Бубнова-Галеркина—метод ортогональных проекций [1]. Ниже предлагается прием, позволяющий в значительной степени упростить выкладки по вычислению коэффициентов системы уравнений, получающейся при использовании метода Бубнова-Галеркина за счет замены интегрирования дифференцированием.

Рассуждения ведутся применительно к обыкновенным дифференциальным уравнениям и уравнениям в частных производных.

Предварительно остановимся на условии приближения функции $Y_m(x) = \sum_{i=1}^{m} C_i \varphi_i(x)$ к заданной функции $Y(x)$ на отрезке [0,1]. При этом следует для доказательства, приведенного ниже, допустить, что функции $Y(x)$ и $\varphi_i(x)$ могут быть на указанном отрезке разложены в ряд Тэйлора и функции $\varphi_i(x)$ составляют полную систему [4].

Интервал [0,1] является достаточным для рассмотрения, так как к нему можно перейти от произвольного интервала $[a, b]$, в пределах которого изменяется переменная z: производя замену z по формуле

$$z = a + (b - a)x,$$

получим

$$x = \frac{z - a}{b - a}.$$

В случае, если есть необходимость от произвольного интервала $[a, b]$ изменения переменной z перейти к интервалу $[-1, +1]$ изменения переменной x, то используется формула

$$z = \frac{1}{2}(b + a) + \frac{1}{2}(b - a)x,$$

откуда получаем

$$x = \frac{2z - b - a}{b - a}.$$

Обозначив далее через $R_m(x)$ невязку, т. е. считая, что

$$R_m(x) = Y(x) - Y_m(x), \tag{1}$$

поставим в качестве условий приближения требование, чтобы средняя невязка на отрезке и $m-1$ среднее значение ее производных обращались бы в нуль, т. е.

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^1 R_m(x)\,dx = 0; \\
&\int_0^1 R'_m(x)\,dx = R_m(1) \quad R_m(0) = 0; \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\int_0^1 R_m^{(m-1)}(x)\,dx = R_m^{(m-2)}(1) - \\
&\qquad - R_m^{(m-2)}(0) = 0.
\end{aligned}\right| \tag{2}$$

Таким образом, получим m уравнений для определения m неизвестных коэффициентов C_i. Для доказательства сходимости процесса, т. е. того, что при $m \to \infty$, имеем

$$\lim_{m\to\infty}[Y(x)-Y_m(x)]=\lim_{m\to\infty}R_m(x)=0, \qquad (3)$$

разложим невязку $R_m(x)$ в степенной ряд, содержащий s членов

$$R_m(x)=\sum_{l=1}^{s}\frac{x^{l-1}}{(l-1)!}R_m^{(l-1)}(0). \qquad (4)$$

$$(s\to\infty)$$

Отсюда получим, что интеграл j—1-ой производной R_m, где под j подразумевается порядковый номер уравнения системы (2) $(j=1,2,\ldots,m)$, равен

$$\int_0^1 R_m^{(j-1)}(x)\,dx=\sum_{l=j}^{s}\frac{1}{(l-j+1)!}R_m^{(l-1)}(0). \qquad (5)$$

Система уравнений (4) будет иметь вид:

$$\left.\begin{aligned}
&j=1,\ \sum_{l=1}^{s}\frac{1}{l!}R_m^{(l-1)}(0)=0;\\
&j=2,\ \sum_{l=2}^{s}\frac{1}{(l-1)!}R_m^{(l-1)}(0)=0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&j=m,\sum_{l=m}^{s}\frac{1}{(l-m+1)!}R_m^{(l-1)}(0)=0
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

или в общем виде

$$\sum_{l=j}^{s}\frac{1}{(l-j+1)!}R_m^{(l-1)}(0)=0\ (j=1,2,3,\ldots,m), \qquad (7)$$

Система (6) будет определенной в том случае, если число неизвестных равно числу уравнений, т. е. $s=m$. Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix}
1 & \frac{1}{2} & \ldots & \frac{1}{(m-1)!} & \frac{1}{m!}\\
0 & 1 & \ldots & \frac{1}{(m-2)!} & \frac{1}{(m-1)!}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & & 1 & \frac{1}{2}\\
0 & 0 & & 0 & 1
\end{vmatrix}=1 \qquad (8)$$

отличен от нуля и равен единице, в то же время система однородная, следовательно решение ее будет нулевым, т. е.

$$R_m^{(l-1)}(0)=0 \qquad (l=1,2,\ldots,m) \qquad (9)$$

Ряд (6) сходится к заданной функции $R_m(x)$ и будет равен ей в пределе при $s\to\infty$.

Для того чтобы воспользоваться в дальнейшем системой (7), положим $s=m$. Тогда, переходя к пределу в формуле (5), получим с учетом формулы (9)

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^1 R_m^{(j-1)}(x)\,dx=$$

$$=\lim_{s=m\to\infty}\sum_{l=j}^{s}\frac{1}{(l-j+1)!}R_m^{(l-1)}(0)=0. \qquad (10)$$

В то же время из формул (4) и (9) следует, что

$$\lim_{m\to\infty}R_m(x)=$$

$$=\lim_{s=m\to\infty}\sum_{l=1}^{s}\frac{x^{l-1}}{(l-1)!}R_m^{(l-1)}(0)=0. \qquad (11)$$

Таким образом, получим, что условие (10)

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^1 R_m^{(j-1)}(x)\,dx=0 \quad (j=1,2,\ldots,\infty)$$

эквивалентно условию

$$\lim_{m\to\infty}R_m(x)=0 \qquad (12)$$

или полином Y_m сходится к функции Y.

Рассмотрим теперь линейное неоднородное уравнение n-го порядка с переменными коэффициентами

$$L[Y]=f(x) \qquad (13)$$

и заданными краевыми условиями. Будем искать приближенное решение уравнения (13) на отрезке $[0,1]$ с помощью функции

$$Y_m=\sum_{i=1}^{m}C_i\varphi_i(x), \qquad (14)$$

которая обязательно должна удовлетворять краевым условиям. Поэтому удобно, чтобы одна или несколько функций $\varphi_i(x)$ удовлетворяли неоднородным краевым условиям, а остальные из общего числа m удовлетворяли бы однородным краевым условиям. Коэффициенты C_i подбираются из условия наилучшего удовлетворения исходному уравнению (13).

Обозначая через $L[Y_m]$ приближенное значение оператора, получим невязку $R_m(x)$ равной

$$L[Y]-L[Y_m]=R_m(x). \qquad (15)$$

Если на невязку $R_m(x)$ наложить условия (2), то получим, согласно рассмотренному выше, что в пределе

$$\lim_{m\to\infty}\{L[Y]-L[Y_m]\}=0 \qquad (16)$$

и, таким образом, приближенное значение линейного оператора будет стремиться к точному. Приведенное выше доказательство сходимости (3) легко обобщается на случай производных функций, и таким образом получаем, что аппроксимирующая функция сходится к заданной вместе со своими производными и равенство (3), а следовательно и равенство (16), можно рассматривать как тождество. Последнее указывает на то, что и приближенное решение дифференциального уравнения будет стремиться к точному при выполнении условий (2) и возрастании m. На условии минимизации невязки R_m основаны применяющиеся на практике приближенные методы решения дифференциальных уравнений Бубнова-Галеркина и наименьших квадратов, сходимость которых применительно к линейным уравнениям доказана [2]. Кроме того, если приближенное решение сходится к точному, то автоматически в пределе получим выполнение условий (2). Все указанные обстоятельства являются подтверждением того, что использование условий (2) позволит получить на практике для линейных дифференциальных уравнений приближенное решение с любой степенью точности.

Предлагаемый способ нахождения неизвестных коэффициентов C_i в выражении (14) с помощью уравнений (2) является частным случаем обобщенного метода интегрирования дифференциальных уравнений Бубнова-Галеркина (метода ортогональных проекций), по которому для определения коэффициентов C_i составляются уравнения вида

$$\left.\begin{array}{l}\int_0^1 \psi_1(x)\, R_m(x, C_1 C_2, \ldots, C_m)\, dx = 0 ; \\ \int_0^1 \psi_2(x)\, R_m(x, C_1 C_2, \ldots, C_m)\, dx = 0 ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \int_0^1 \psi_m(x)\, R_m(x, C_1 C_2, \ldots, C_m)\, dx = 0 ,\end{array}\right\} \quad (17)$$

где $R_m(x, C_1, C_2, \ldots, C_m)$ — невязка;
$\psi_j(x)$ — линейно независимые функции;
j — порядковый номер уравнения, изменяющийся от 1 до m.

В качестве функций $\psi_j(x)$, применяя обобщенный метод Бубнова-Галеркина, часто берут системы степеней x или системы тригонометрических полиномов.

Определение коэффициентов уравнений системы (17) приводит к необходимости вычисления m^2 интегралов, что может быть затруднительным. Эту задачу можно сильно упростить, если принять функции $\psi_j(x)$ в таком виде:

$$\psi_j(x) = \frac{R_m^{(j-1)}(x, C_1, C_2, \ldots, C_m)}{R_m(x, C_1, C_2, \ldots, C_m)} , \quad (18)$$

т. е. привести уравнение (17) к виду, который имеют уравнения (2). Ограничением для применения способа должно служить условие интегрируемости невязки и ее производных, а также неполнота системы функций $\psi_j(x)$ [4].

Для иллюстрации рассмотрим пример, приведенный в книге [1]. Требуется найти решение линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + (1 + x^2)\, y + 1 = 0; \quad y(\pm 1) = 0. \quad (19)$$

В целях упрощения воспользуемся только двумя базисными функциями и найдем решение в следующем виде:

$$Y_m = C_1(1 - x^2) + C_2(x^2 - x^4) . \quad (20)$$

Подставляя выражение (20) в формулу (19), получим невязку

$$R_m = 1 - C_1(1 + x^4) + C_2(2 - 11\, x^2 - x^6) \quad (21)$$

и далее, используя уравнения (2), получаем

$$\left.\begin{array}{l}\int_0^1 R_m\, dx = 1 - \frac{6}{5}\, C_1 - \frac{38}{21}\, C_2 = 0 ; \\ \int_0^1 R'_m\, dx = - C_1 - 12\, C_2 = 0 .\end{array}\right\} \quad (22)$$

Таким образом, имеем систему для определения коэффициентов C_1 и C_2.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{6}{5}\, C_1 + \frac{38}{21}\, C_2 = 1 ; \\ C_1 + 12\, C_2 = 0 .\end{array}\right\} \quad (23)$$

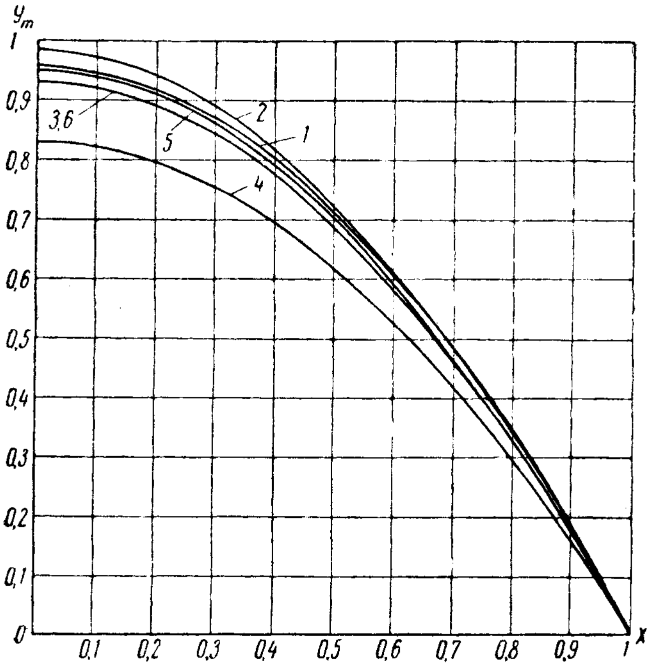
Способ приближенного интегрирования уравнения (19)	C_1	C_2	C_3	Погрешность δ*	Y_m (0)	Номера кривых на рисунке
Конечных разностей [1]	—	—	—	—	0,967	—
Коллокации [1] в точках $x = 0$ и $x = \pm \frac{1}{2}$	0,957	−0,022	0	0,2220	0,957	1
Наименьших квадратов интегральный [1]	0,985	−0,078	0	0,0956	0,985	2
Наименьших квадратов точечный [1] $\left(x = 0;\ x = \pm \frac{1}{4};\ x = \pm \frac{1}{2};\ x = \pm \frac{3}{4}\right)$	0,932	−0,047	0	0,1045	0,932	3
Предлагаемый: при одной базисной функции	0,833	0	0	0,2420	0,833	4
Предлагаемый: при двух базисных функциях	0,953	−0,079	0	0,0720	0,953	5
Предлагаемый: при трех базисных функциях	0,932	−0,038	−0,027	0,0210	0,932	6

* Среднеквадратическая погрешность δ оценена по формуле

$$\delta = \sqrt{\int_0^1 R_m^2(x)\, dx} .$$

Откуда $C_1 = 0{,}9531$; $C_2 = 0{,}0794$ и $Y_m(0) = 0{,}9531$.

Если воспользоваться предлагаемым приемом и одной базисной функцией



$$Y_m = C_1(1 - x^2), \tag{24}$$

то получим $C_2 = 0{,}833$ и $Y_m(0) = 0{,}833$, а если взять три базисных функции, т. е. считать

$$Y_m = C_1(1 - x^2) + C_2(x^2 - x^4) + C_3(x^4 - x^6),$$

то получим $C_1 = 0{,}932$; $C_2 = -0{,}0375$;

$$C_3 = -0{,}0268; \quad Y_m(0) = 0{,}932.$$

Для сопоставления приведем в таблице результаты интегрирования этого уравнения различными способами.

Таким образом, как следует из примера, имеет место достаточное совпадение результатов, полученных по предлагаемому методу и другим методам, а по мере увеличения числа базисных функций средняя квадратическая погрешность резко уменьшается. В то же время при применении предлагаемого приема значительно упрощаются выкладки.

Предлагаемый прием может быть применен и к дифференциальным уравнениям в частных производных.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами, с которым приходится встречаться при решении ряда задач механики грунтов:

$$A(x, y)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2B(x, y)\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} +$$

$$+ F\left(x, y, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right) = 0, \tag{25}$$

где $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$ и $F\left(x, y, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right)$ — заданные функции, а искомая функция U должна удовлетворять заданным граничным и начальным условиям, если решается задача, связанная со временем.

Задавая приближенное значение

$$U_m = \sum_{i=1}^{m} C_i \varphi_i(x, y)$$

и, рассуждая аналогично вышеприведенному, получим, что невязка $R_m(x, y)$ в области Ω будет стремиться к нулю при неограниченном возрастании числа слагаемых m и, следовательно, коэффициентов, подлежащих определению, где

$$R_m(x, y) = L(U) - L(U_m), \tag{26}$$

т. е.

$$\lim_{m \to \infty} R_m = 0 \tag{27}$$

и при этом получим в пределе

$$\lim_{m \to \infty} (U - U_m) = 0, \tag{28}$$

если выполнены условия:

$$\left.\begin{aligned}
&\iint_\Omega R_m(x, y)\, dxdy = 0;\\
&\iint_\Omega \frac{\partial R_m(x, y)}{\partial x}\, dxdy = 0;\\
&\iint_\Omega \frac{\partial R_m(x, y)}{\partial y}\, dxdy = 0;\\
&\iint_\Omega \frac{\partial^2 R_m(x, y)}{\partial x^2}\, dxdy = 0;\\
&\iint_\Omega \frac{\partial^2 R_m(x, y)}{\partial x \partial y}\, dxdy = 0;\\
&\iint_\Omega \frac{\partial^2 R_m(x, y)}{\partial y^2}\, dxdy = 0;
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

и т. д.

Число уравнений получится равным

$$\frac{1}{2}(s+1)(s+2),$$

где s — высший порядок производных, входящих в систему (29), т. е. при $s = 1$ число уравнений равно 3, при $s = 2$ их 6, при $s = 3$ их 10 и т. д.

В том случае, когда желательно получить приближение по какой-либо одной переменной большее, чем по другой, то можно несколько изменить исходную систему за счет включения большего числа уравнений с производными от R_m по переменной, по которой хотим получить лучшее приближение, и меньшего числа уравнений с производными по другой переменной.

Из системы уравнений (29) определяются неизвестные коэффициенты C_i, причем число коэффициентов следует принимать

$$m = \frac{1}{2}(s+1)(s+2).$$

Особо просто уравнения (29) выглядят в случае прямоугольной области интегрирования. Если область интегрирования прямоугольная, что на практике не редко встречается, и x изменяется в интервале $[a, b]$, а y изменяется в интервале $[c, d]$, то система (29) будет иметь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_c^d\int_a^b R_m(x, y)\,dxdy = 0\,;\\
&\int_c^d [R_m(b, y) - R_m(a, y)]\,dy = 0\,;\\
&\int_a^b [R_m(x, d) - R_m(x, c)]\,dx = 0\,;\\
&\int_c^d \left[\frac{\partial R_m(b, y)}{\partial x} - \frac{\partial R_m(a, y)}{\partial x}\right] dy = 0\,;\\
&R_m(b, d) - R_m(b, c) - R_m(a, d) + \\
&\quad + R_m(a, c) = 0\,;\\
&\int_a^b \left[\frac{\partial R_m(x, d)}{\partial y} - \frac{\partial R_m(x, c)}{\partial y}\right] dx = 0\,;\\
&\text{и т. д.}
\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Проще всего на примере проследить применение предлагаемого приема решения дифференциального уравнения в частных производных. Уравнение консолидации грунтовой массы, как известно, совпадает с уравнением теплопроводности. Рассмотрим одномерную задачу консолидации слоя грунта высотой H, находящегося на водоупоре при нагрузке, растущей во времени с постоянной скоростью v_0 и приложенной на верхней границе слоя, которая дренируется.

Уравнение консолидации имеет вид [3]

$$\frac{\partial}{\partial t}(P_1 + P_2 - P_в - P_{пор}) = c\frac{\partial^2}{\partial x^2}(P_1 + P_2 - - P_в - P_{пор}), \quad (31)$$

где P_1—полная нагрузка сверху, равная

$$P_1 = v_0 t\,; \quad (32)$$

$P_2 - P_в$—давление в скелете от веса грунта на глубине x, равное при объемном весе взвешенного в воде грунта $\gamma_{взв}$

$$P_2 - P_в = \gamma_{взв}(H - x)\,; \quad (33)$$

c—коэффициент консолидации,
t—время,
x—текущая координата, отсчитываемая от низа слоя, и наконец,
$P_{пор}$—поровое давление, подлежащее определению.

Подставляя выражения (32) и (33) в уравнение (31), получим

$$\frac{\partial P_{пор}}{\partial t} - v_0 - c\frac{\partial^2 P_{пор}}{\partial x^2} = 0. \quad (34)$$

Граничные и начальные условия у задачи следующие:

$$\left.\begin{aligned}
t &= 0 \qquad P_{пор} = 0\\
x &= H \qquad P_{пор} = 0\\
x &= 0 \qquad \frac{\partial P_{пор}}{\partial x} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Получим приближенное решение этой задачи, ограничиваясь тремя базисными функциями.

Ищем решение уравнения (34) в следующем виде:

$$P_{пор} = a_1\left[\left(\frac{x}{H}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{H}\right)^4 - \frac{1}{2}\right]t + + a_2\left[\left(\frac{x}{H}\right)^4 - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{H}\right)^6 - \frac{1}{3}\right]t^{\frac{1}{2}} + + a_3\left[\left(\frac{x}{H}\right)^6 - \frac{3}{4}\left(\frac{x}{H}\right)^8 - \frac{1}{4}\right]t^{\frac{1}{4}}. \quad (36)$$

Подлежат определению коэффициенты a_1, a_2 и a_3. Соответствующие производные, необходимые для подстановки в выражение (34) от выражения (36), равны

1) по времени

$$\frac{\partial P_{пор}}{\partial t} = a_1\left[\left(\frac{x}{H}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{H}\right)^4 - \frac{1}{2}\right] + \frac{a_2}{2}\left[\left(\frac{x}{H}\right)^4 - - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{H}\right)^6 - \frac{1}{3}\right]t^{-\frac{1}{2}} + \frac{a_3}{4}\left[\left(\frac{x}{H}\right)^6 - \frac{3}{4}\left(\frac{x}{H}\right)^8 - - \frac{1}{4}\right]t^{-\frac{3}{4}}\,; \quad (37)$$

2) по координате

$$\frac{\partial^2 P_{пор}}{\partial x^2} = \frac{2a_1}{H^2}\left[1 - 3\left(\frac{x}{H}\right)^2\right]t + \frac{4a_2}{H^2}\left[3\left(\frac{x}{H}\right)^2 - - 5\left(\frac{x}{H}\right)^4\right]t^{\frac{1}{2}} + \frac{6a_3}{H^2}\left[5\left(\frac{x}{H}\right)^4 - 7\left(\frac{x}{H}\right)^6\right]t^{\frac{1}{4}}. \quad (38)$$

Подставляя выражения (37) и (38) в уравнение (34), получим после небольших преобразований невязку $R_m(x, t)$ в следующем виде:

$$R_m = a_1\left\{\left(\frac{x}{H}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{H}\right)^4 - \frac{1}{2} - - \frac{2c}{H^2}\left[1 - 3\left(\frac{x}{H}\right)^2\right]t\right\} + a_2\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{H}\right)^4 - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{H}\right)^6 - - \frac{1}{3}\right]t^{-\frac{1}{2}} - \frac{4c}{H^2}\left[3\left(\frac{x}{H}\right)^2 - 5\left(\frac{x}{H}\right)^4\right]t^{\frac{1}{2}}\right\} + + a_3\left\{\frac{1}{4}\left[\left(\frac{x}{H}\right)^6 - \frac{3}{4}\left(\frac{x}{H}\right)^8 - \frac{1}{4}\right]t^{-\frac{3}{4}} - - \frac{6c}{H^2}\left[5\left(\frac{x}{H}\right)^4 - 7\left(\frac{x}{H}\right)^6\right]t^{\frac{1}{4}}\right\} - v_0. \quad (39)$$

Далее для определения коэффициентов a_1, a_2 и a_3 используем три первых уравнения системы (30), считая, что x изменяется на отрезке [0, H] и t на отрезке [0, T].

Производя соответствующее интегрирование, получим следующую систему уравнений. Первое уравнение

$$\int_0^T \int_0^H R_m \, dx \, dt = 0 ,$$

или

$$\frac{8}{30} a_1 + \frac{8}{35} T^{-\frac{1}{2}} a_2 + \frac{4}{21} T^{-\frac{3}{4}} a_3 = -v_0, \tag{40}$$

второе уравнение

$$\int_0^T [R_m(H, t) - R_m(0, t)] \, dt = 0 ,$$

или

$$\left(\frac{1}{2} T + \frac{3c}{H^2} T^2\right) a_1 + \left(\frac{1}{3} T^{\frac{1}{2}} + \frac{16c}{3H^2} T^{\frac{3}{2}}\right) a_2 + \left(\frac{1}{4} T^{\frac{1}{4}} + \frac{48c}{5H^2} T^{\frac{5}{4}}\right) a_3 = 0, \tag{41}$$

и третье уравнение

$$\int_0^H [R_m(x, T) - R_m(x, 0)] \, dx = 0 ,$$

или

$$\frac{4}{5} T^{-\frac{1}{2}} a_2 + \frac{1}{3} T^{-\frac{3}{4}} a_3 = 0 . \tag{42}$$

Далее для определения коэффициентов a_1, a_2 и a_3 следует решить систему уравнений (40), (41) и (42). Подставляя полученные значения коэффициентов в выражение для порового давления (36), получим приближенное решение поставленной задачи

$$P_{пор} = \left\{ \frac{15}{4}\left[\frac{5}{14} A - 1\right]\left[\left(\frac{x}{H}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{H}\right)^4 - \frac{1}{2}\right] t + \frac{25}{16} A T^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{x}{H}\right)^4 - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{H}\right)^6 - \frac{1}{3}\right] - \frac{15}{4} A T^{\frac{3}{4}} t^{\frac{1}{4}} \left[\left(\frac{x}{H}\right)^6 - \frac{3}{4}\left(\frac{x}{H}\right)^8 - \frac{1}{4}\right]\right\} v_0 , \tag{43}$$

где

$$A = \frac{\frac{1}{2} + 3\frac{cT}{H^2}}{\frac{17}{252} + \frac{563}{630} \cdot \frac{cT}{H^2}} . \tag{44}$$

В заключение укажем, что оценка погрешности, получающейся вследствие приближенности решения задачи, может быть произведена с помощью среднеквадратичной погрешности:

$$\delta = \sqrt{\frac{\int_c^d \int_a^b R_m^2(x, y) \, dx \, dy}{(b-a)(d-c)}} . \tag{45}$$

При увеличении количества членов приближенного решения, содержащих неизвестные коэффициенты, величина погрешности δ должна уменьшаться.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. Физматгиз, 1962.
2. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике, Гостехиздат, 1957.
3. Малышев М. В. Уплотнение водонасыщенного грунта при постепенном увеличении толщины слоя. „Основания, фундаменты и механика грунтов“ № 3, 1959.
4. Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, 1950.