М.В.Малышев

профессор, доктор технических наук
Московский инженерно-строительный
институт имени В.В.Куйбышева, Москва,
СССР

РАСЧЕТ ОСАДОК ФУНДАМЕНТОВ С УЧЁТОМ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ

А н н о т а ц и я

В расчётной практике для определения напряжённого состояния оснований широко используются решения теории упругости, в которых предполагается линейная связь между напряжениями и деформациями. В действительности, как показывают многие экспериментальные исследования, связь эта нелинейная. Ниже излагается расчётный способ, позволяющий прогнозировать осадку фундамента за пределом линейной зависимости между напряжениями и деформациями. Способ предлагается как оценочный сверху, то-есть дающий не преуменьшенные по сравнению с действительностью величины прогнозируемых осадок. Предлагаемая схема развивает способ эквивалентного слоя, предложенный ранее проф. Н.А.Цытовичем. Описываемый расчётный способ представляется важным для правильного учёта взаимодействия оснований и сооружений, оснащённых различными коммуникациями.

В предлагаемом способе расчёта осадки, который позволяет учесть нелинейную деформируемость грунта, вводятся две характерные нагрузки: P_I - при которой в основании начинают образовываться области с предельным состоянием и P_2 - при которой основание полностью теряет несущую способность. Осадку, соответствующую нагрузке P_I будем считать равной той, которая получается из решения для полупространства или из другого инженерного решения, например рекомендуемого в нормах /СНиП, 1975/. Излагаемый здесь способ является дальнейшим развитием предложения, описанного нами ранее /Малышев, 1977/.

Нагрузка P_I устанавливается из известной формулы, полученной Пузыревским и Фрёлихом /Цытович, 1963/

$$P_1 = \frac{\pi\,(c \cdot ctg\,\varphi + \gamma h_1)}{ctg\,\varphi + \varphi - \frac{\pi}{2}} + \gamma h_1 \qquad /1/$$

где γ - объёмный вес грунта основания, h_1 - величина заглубления фундамента в основание, c - удельное сцепление, φ - угол внутреннего трения грунта. Нагрузка P_2 может быть найдена по любому из существующих решений, например из формулы Терцаги /1961/.

$$P_2 = \frac{1}{2} N_\gamma \gamma b + N_q \gamma h_1 + N_c c \qquad /2/$$

где b - ширина фундамента, N_q и N_c - коэффициенты, устанавливаемые из формул

$$N_q = \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} e^{\pi \operatorname{tg}\varphi}; \quad N_c = (N_q - 1)\operatorname{ctg}\varphi \qquad /3/$$

Коэффициент N_γ установлен в результате численного решения и его значения приведены в Таблице I /промежуточные значения могут быть найдены путём интерполяции/.

Таблица I

φ°	0	5	10	15	20	25	30	35	40
N_γ	0	0.34	1.12	2.80	6.32	13.8	30.6	70.4	173.0

В предложенном расчётном способе, опирающемся на способ эквивалентного слоя, предложенный Цытовичем /1963/, рассматривается массив грунта в форме параллелепипеда или цилиндра, основанием которого служит подошва фундамента, а высота определяется исходя из равенства осадок при сжатии его сначала без возможности бокового расширения, а в последующем при ограниченном боковом расширении вплоть до достижения предельного состояния в грунте /Рис.1/.

При невозможности бокового расширения и при $P \leq P_1$ боковое давление оказывается равным

$$q = P\frac{\mu_0}{1-\mu_0}; \quad q_1 = P_1 \frac{\mu_0}{1-\mu_0} \qquad /4/$$

где μ_0 - коэффициент Пуассона грунта. При предельном состоянии, с использованием условия прочности Мора, имеем следующее соотношение между боковым q_2 и вертикальным P_2 давлениями

$$q_2 = \frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi} P_2 - \frac{2c\cos\varphi}{1+\sin\varphi} \qquad /5/$$

Таким образом, при изменении величины P в пределах $P_1 \leq P \leq P_2$ боковое давление q меняется в пределах $q_1 \leq q \leq q_2$. В первом приближении между q и P принимается линейная зависимость

$$q = P\frac{q_2 - q_1}{P_2 - P_1} + \frac{P_2 q_1 - P_1 q_2}{P_2 - P_1} \qquad /6/$$

Рис. I Расчётная схема

Связь между напряжениями и деформациями описывается зависимостями Генки, аналогичными по записям зависимостям закона Гука, с той разницей, что модули сдвига G и объёмного сжатия К являются не постоянными величинами, а зависят от инвариантов напряжений

$$G=\frac{\tau_{окт}}{\gamma_{окт}}=G\left(\tau_{окт},\sigma_{окт}\right);\quad K=\frac{\sigma_{окт}}{\varepsilon}=K\left(\tau_{окт},\sigma_{окт}\right), \qquad /7/$$

где

$$\tau_{окт}=\frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2};$$

$$\gamma_{окт}=\frac{1}{3}\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2};$$

$$\sigma_{окт}=\frac{1}{3}\left(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3\right);\quad \varepsilon=\frac{1}{3}\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3\right) \qquad /8/$$

$\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\sigma_3$ - главные напряжения и ε_1, ε_2, ε_3 - главные деформации. Главные напряжения можно выразить через $\tau_{окт}$, $\sigma_{окт}$ и параметр напряжённого состояния ν следующим образом /Мальшев, I968/

$$\nu = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}\ ; \quad -1 \leq \nu \leq 1 \tag{9}$$

$$\sigma_1 = \sigma_{окт} + \frac{\sqrt{2}\,\tau_{окт}}{2\sqrt{3+\nu^2}}(3-\nu)\ ; \quad \sigma_2 = \sigma_{окт} + \frac{\sqrt{2}\,\nu}{\sqrt{3+\nu^2}}\tau_{окт}\ ;$$

$$\sigma_3 = \sigma_{окт} - \frac{(3+\nu)\sqrt{2}}{2\sqrt{3+\nu^2}}\tau_{окт} \tag{10}$$

Боткин /1940/ предложил использовать для модуля сдвига дробно-линейную функцию, которая в преобразованном применительно к напряжениям виде оказывается следующей

$$G = \frac{A_1}{B_1}\sigma_{окт} + \frac{C_1}{B_1} - \frac{\tau_{окт}}{B_1} \tag{11}$$

коэффициенты A_1, B_1, C_1 – эмпирические. Аналогичным образом для модуля объёмного сжатия запишем, что

$$K = K_c + A_2\sigma_{окт} + B_2\tau_{окт} \tag{12}$$

где A_2 и B_2 – также эмпирические коэффициенты.

В предельном состоянии выражение /11/ обращается в нуль и из него получается условие прочности. Пользуясь зависимостями /10/ для σ_1 и σ_3, получим

$$\tau_{окт} = (\sigma_1 - \sigma_3)\frac{\sqrt{3+\nu^2}}{3\sqrt{2}}\ ; \quad \sigma_{окт} = \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} + \frac{\nu}{6}(\sigma - \sigma_3) \tag{13}$$

после чего выражение /11/ можно преобразовать к следующему виду

$$G = \frac{\sqrt{2(3+\nu^2)} - \nu A_1}{3B_1}\left[\frac{3A_1}{\sqrt{2(3+\nu^2)} - A_1\nu}\cdot\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} + \frac{3C_1}{\sqrt{2(3+\nu^2)} - A_1\nu} - \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right] \tag{14}$$

Здесь выражение в квадратных скобках в предельном состоянии должно обратиться в нуль. В то же время для предельного состояния имеем условие прочности Мора

$$\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\sin\varphi + c\cdot\cos\varphi - \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2} = 0 \tag{15}$$

Производя тождественное приравнивание коэффициентов при напряжениях в выражениях /14/ и /15/, имеем

$$A_1 = \frac{\sqrt{2(3+\nu^2)}\sin\varphi}{3+\nu\sin\varphi}\ ; \quad B_1 = \frac{\sqrt{2(3+\nu^2)}}{2(3+\nu\sin\varphi)G_0}\ ;$$

$$C_1 = \frac{\sqrt{2(3+\nu^2)}\cdot c\cdot\cos\varphi}{3+\nu\sin\varphi} \tag{16}$$

Таким образом, из зависимостей /14/ и /16/ получаем

$$G = 2G_0\left(\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\sin\varphi + c\cdot\cos\varphi - \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right) \tag{17}$$

Модуль сдвига должен быть равен

$$G_1 = \frac{E_0}{1+\mu_0} \qquad /18/$$

Это позволяет с учётом выражений /4/ и того, что $\sigma_1 = P_I$ и $\sigma_3 = q_1$ найти величину G_0, которая оказывается равной

$$G_0 = \frac{E_0}{1+\mu_0} \cdot \frac{1}{\left[\frac{P_1}{1-\mu_0}\left(2\mu_0 + \sin\varphi - 1\right) + 2c\cdot\cos\varphi\right]} \qquad /19/$$

где E_0 - модуль деформации грунта в пределах линейного участка при $P \leq P_I$. Очевидно, что в выражении /19/ знаменатель должен быть положительным, что при $c = 0$ требует, чтобы коэффициент Пуассона был бы

$$\mu_0 \geqslant \frac{1-\sin\varphi}{2} \qquad /20/$$

Подставив выражения /4/,/5/,/6/,/14/,/16/ и /19/ в /11/, получим после преобразований для G достаточно простую зависимость

$$G = \frac{P_2 - P}{P_2 - P_1} G_1 = \frac{P_2 - P}{P_2 - P_1} \cdot \frac{E_0}{1+\mu_0} \qquad /21/$$

Линейная зависимость для модуля объёмного сжатия /12/ приводит к следующему простому выражению

$$K = K_0'\left(1 + \alpha \frac{P - P_1}{P_2 - P_1}\right) \qquad /22/$$

если

$$A_2 = \frac{K_0' \alpha}{P_2 - P_1}; \quad B_2 = A_2 \frac{\sqrt{2}\,(3-\vartheta)}{2\sqrt{3+\vartheta^2}} \qquad /23/$$

Модуль объёмного сжатия будет следующим при характерных давлениях

$$\begin{aligned} P &= 0, & K &= K_0'\left(1 - \alpha \frac{P_1}{P_2 - P_1}\right) \\ P &= P_I, & K &= K_0' = \frac{E_0}{1 - 2\mu_0} \\ P &= P_2, & K &= K_0'\left(1 + \alpha\right) \end{aligned} \qquad /24/$$

Из этих условий возможно найти α и K_0. Переходим теперь непосредственно к вычислению осадки. В случае ограниченного бокового расширения вертикальная деформация ε_z равна

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_0}\left[\sigma_z - \mu_0\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] = \frac{2K+G}{3KG}\sigma_z - \frac{K-G}{3KG}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = \qquad /25/$$

$$= \frac{1}{3G}\left(2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y\right) + \frac{1}{3K}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)$$

В выражение /25/ входят два боковых напряжения σ_x и σ_y. Одно из них определяется в рассматриваемом решении по выражению /6/, а второе может быть установлено из /9/ путём введения параметра ν, то-есть

$$q' = \frac{\nu}{2}(p-q) - \frac{p+q}{2} = \frac{1+\nu}{2}p + \frac{1-\nu}{2}q \qquad /26/$$

Для дальнейших преобразований выражения /25/ следует воспользоваться формулами /6/, /21/, /22/, /24/ и /26/. Подставив последние в /25/, будем иметь

$$\varepsilon_z = \frac{3-\nu}{6E_0}\left\{\frac{1+\mu_0}{P_2-P}\left[p(P_2-P_1) - q_2(P-P_1) - q_1(P_2-P)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1-2\mu_0}{P_2-P_1+\alpha(P-P_1)}\left[\frac{3+\nu}{3-\nu}p(P_2-P_1) + q_2(P-P_1) + q_1(P_2-P)\right]\right. \qquad /27/$$

Осадка фундамента оказываеся равной

$$S = \varepsilon_z \cdot h \qquad /28/$$

где h определяется через осадку S_1, соответствующую давлению P_I и определяемую одним из известных способов, например способом, рекомендуемым в нормах /СНиП, 1975/

$$h = \frac{S_1 \cdot E_0 (1-\mu_0)}{P_1 (1+\mu_0)(1-2\mu_0)} \qquad /29/$$

Формула /27/ рекомендуется для использования при $P_I < P < P_2$. При $P = P_2$ мы получаем бесконечную осадку, при $P = P_I$ осадку, равную S_1. Эта формула даёт не преуменьшенное значение осадки и поэтому она может служить оценочной сверху. Эта формула указывает на гиперболическую зависимость между осадкой и нагрузкой и имеет при $P = P_2$ вертикальную касательную, однако в действительности такой касательной наблюдаться не будет.

<u>Пример расчёта.</u> Фундамент квадратный размерами 2 х 2 метра. Осадка S_1 = 1.80 см, модуль E_0 = 15 MPa, μ_0 = 0.3, α = 0.2, заглубление h_1 = 150 см, γ = 18.0 кН/м^3, φ = 20^0, c = 0.02 MPa.

Расчёт ведём следующим образом:

- по формуле /29/ находим h = 185.7 см. Принимаем для квадратного фундамента ν = - I, то-есть случай осевой симметрии.

Вообще в первом приближении можно рекомендовать следующую формулу для вычисления ν, основанную на линейной интерполяции при

$n = \ell / b$, где ℓ - длинная сторона фундамента и b - короткая его сторона

$$\nu = \frac{p(2\mu_0 n - n - 3\mu_0) + q(2 + 2n\mu_0 - n - \mu_0)}{(p - q)(n + \mu_0)} \qquad /30/$$

- по формуле /I/ имеем $P_I = 0.196$ MPa,
- по формулам /2/, /3/ и Табл.I получаем $N_q = 6.39$, $N_c = 14.81$, $N_\gamma = 6.32$, откуда $P_2 = 0.583$ MPa,
- по формулам /4/ и /5/ имеем $q_1 = 0.0839$ MPa, $q_2 = 0.258$ MPa
- далее расчёт ведётся по формулам /27/ и затем /28/ при разных значениях P . Результаты сведены в Таблицу 2

Табл. 2

P , MPa	0.196	0.3	0.4	0.5	0.55	0.583
S , см	1.80	3.46	6.34	15.53	40.79	∞

Подсчитаем также расчётное давление R по СНиП /1975/, которое при наших данных оказывается равным $R = 0.214$ MPa.

Результаты расчетов иллюстрируются кривой /Рис. 2/.

Рис. 2. К примеру расчёта

Результаты изложенной работы позволяют провести прогноз осадки за пределом линейной зависимости между напряжениями и деформациями. Это представляется важным не только для расчёта самих фундаментов, но и наземных конструкций, а также коммуникаций. В частности, мы имеем возможность в каркасных зданиях замыкать каркас и придавать ему полную жёсткость после завершения деформаций, осуществлять замыкание трубопроводов и монтаж оборудования здания, имеющего отдельные фундаменты с учётом их осадки и т.д.

Расчётный способ, описанный выше, позволяет оценить взаимодействие основания и сооружения.

Л И Т Е Р А Т У Р А

СНиП /1975/. Строительные нормы и правила. Нормы проектирования. Основания зданий и сооружений. Глава П-15-74, Стройиздат, Москва.

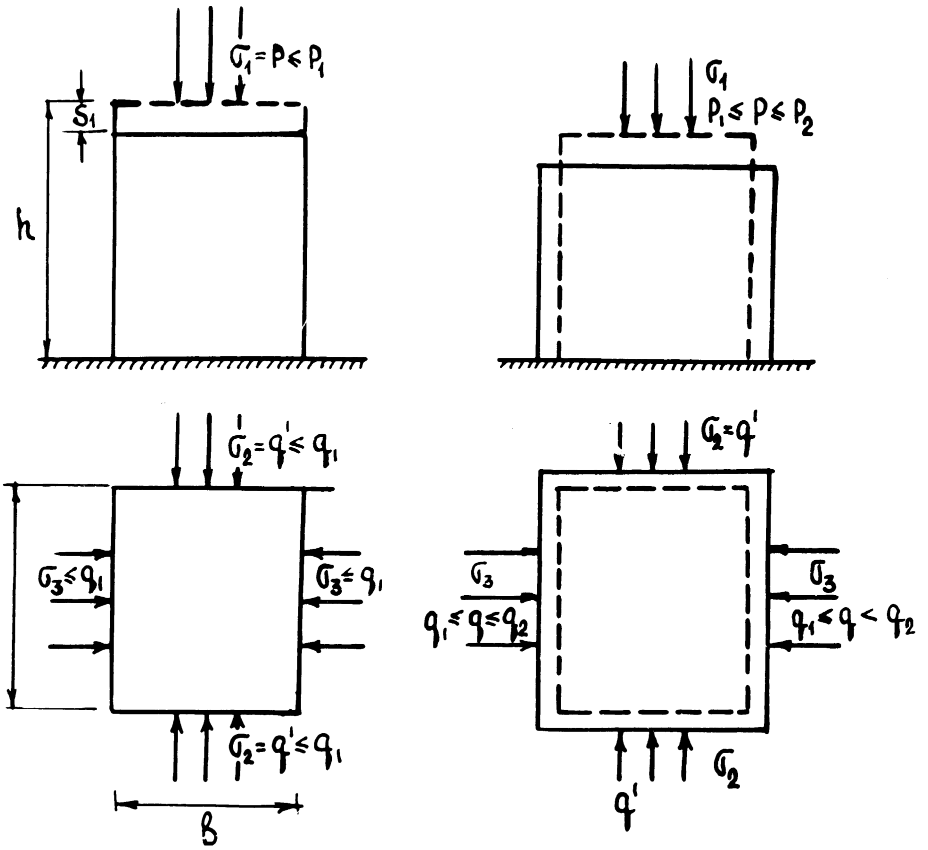
Боткин А.И. /1940/. О прочности сыпучих и хрупких материалов. Известия Научно-исследовательского института гидротехники /НИИГ/, том 26, Ленинград.

Терцаги К. /1961/. Теория механики грунтов /перевод/. Стройиздат, Москва.

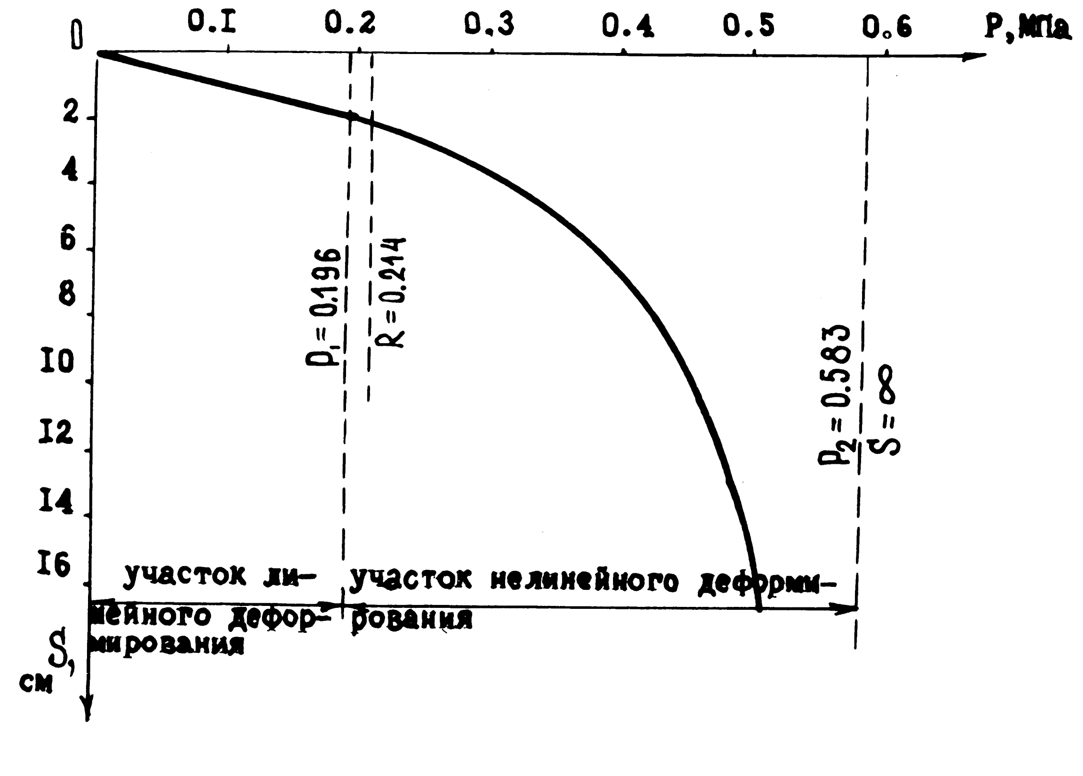
Цытович Н.А. /1963/. Механика грунтов. Стройиздат, Москва.

Малышев М.В. /1977/. Расчёт осадок фундаментов за пределом линейной зависимости между напряжениями и деформациями. Труды Пятой Дунайской Европейской конференции по механике грунтов и фундаментостроению. Том Ш. Братислава, ЧССР.

Малышев М.В. /1968/, Фрадис Э.Д. Условия прочности песчаных грунтов. Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae Tomus 63 (1-4) pp. 167-175. Proceedings of the 3-rd Budapest Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Hungarian Academy of Sciences. Budapest.



σ1 = p ≤ p1
S1
h
σ1
p1 ≤ p ≤ p2
σ2 = q' ≤ q1
σ3 ≤ q1
σ3 ≤ q1
l
σ2 = q' ≤ q1
b
σ2 = q'
σ3
q1 ≤ q ≤ q2
σ3
q1 ≤ q < q2
σ2
q'



0
0.I
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
P, МПа
2
4
6
8
I0
I2
I4
I6
S, см
p1 = 0.196
R = 0.214
p2 = 0.583
S = ∞
участок линейного деформирования
участок нелинейного деформирования