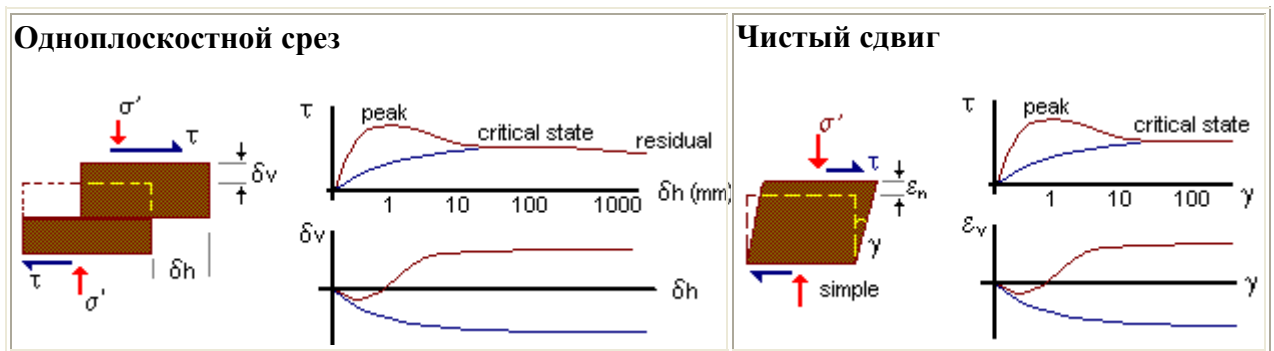


## Поведение песчаного грунта в процессе деформирования

Прочность грунта определяется его сопротивлением сдвигу при действии касательных напряжений и определяется таким состоянием грунта, при котором максимальное касательное напряжение остается постоянным на плоскости скольжения (разрушения). Определяют три различных значения прочности: пиковое, критическое (или предельное) и остаточное.

Испытания грунтов при определении их прочности проводится в лабораторных условиях в приборах различной конструкции: прямого (одноплоскостного среза), трехосного сжатия, чистого сдвига. На рис. по-

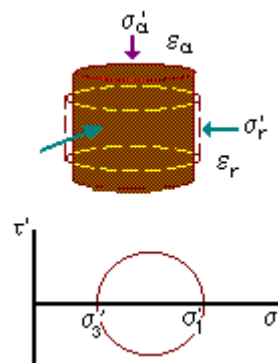


казаны схемы испытаний в условиях одноплоскостного среза и чистого сдвига, а на рис. в условиях трехосного сжатия.

### Трехосные (осевая симметрия)

Параметры используемые для анализа:

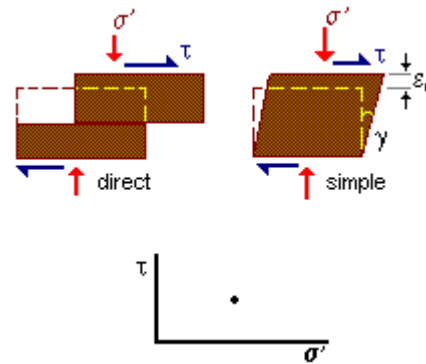
- девиаторное напряжение
- деформация сдвига
- нормальное напряжение
- объемная деформация
- поровое давление
- коэффициент пористости



**Прямой или чистый сдвиг**

Параметры используемые для анализа:

- касательное напряжение
- деформация сдвига
- нормальное напряжение
- объемная деформация
- коэффициент пористости



Невозможно построить круги Мора из испытаний на сдвиг пока не будут измерены напряжения на вертикальных плоскостях.

Поведение образцов песчаного грунта оказывается различным при их нагружении в условиях осесимметричной и плоской деформации как в характере зависимости  $\varepsilon_1 = f(\sigma'_1 - \sigma'_3)$ , так и форме деформации образца в предельном состоянии. В опытах в условиях осесимметричной деформации предельное состояние характеризуется деформированием песка без упрочнения (рис. 1 а, б, пунктир) при этом форма деформации образца наблюдается в виде «бочки». Напротив, в условиях плоской деформации кривая зависимости  $\varepsilon_1 = f(\sigma'_1 - \sigma'_3)$  имеет пик, который более выражен в плотном песке или высоком значении бокового давления (рис. 1 а, б, сплошная линия).

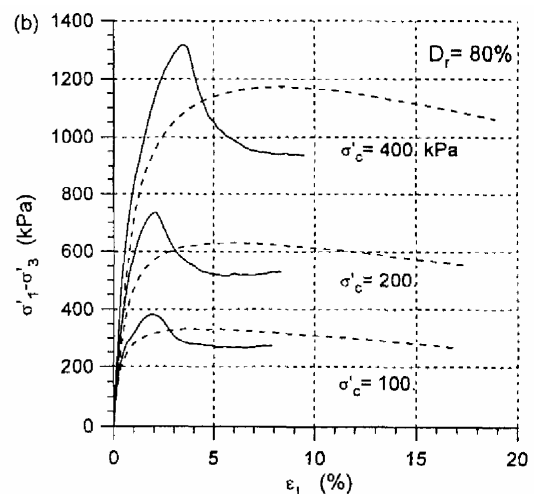
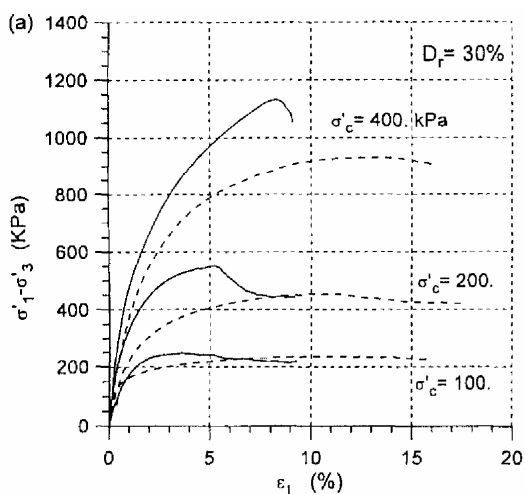


Рис. 1. Изменение осевой деформации с ростом девиатора напряжений ( $\sigma'_1 - \sigma'_3$ ) для условий трехосной (пунктир) и плоской деформации (сплошная) для рыхлого (а) и плотного (б) песка (Sterpi D., 2000)

В условиях плоской деформации при достижении пикового значения напряжений наблюдается начало локализации деформаций в узкой зоне. С возрастанием осевой деформации эта зона развивается в полосу сдвига, приводящая к разрушению до остаточной прочности.

Параметры прочности и деформируемости песчаного грунта полученные по различным схемам применительно к условию прочности Мора – Кулона и линейно упругому деформированию: осесимметричное сжатие; плоская деформация; прямой срез приведены в табл. 2, 3.

Табл. 2. Параметры прочности получены в трехосных (ТС), плоской деформации (ПД) и прямого среза (ПС) испытаний / (Sterpi D., 2000) /

Тип испытания	$D_r$ , %	Значение при разруш., $\varphi$ , град	Пиковое значение, $\varphi_p$ , град.	Остаточное значение, $\varphi_o$ , град.
ТС	30	32,5		
	80	36,8		
ПД	30		35,7	31,9
	80		39,0	33,1
ПС	30	30,2		
	80		36,3	32,6

Табл.3. Показатели деформируемости в трехосных (ТС) и плоской деформации (ПД) испытаниях / (Sterpi D., 2000) /

Тип испы- тания	D <sub>r</sub> , %	Секущий модуль деформации, E <sub>50</sub> , МПа			Коэффициент Пуассона, ν		
		Боковое давление, кПа			Боковое давление, кПа		
		100	200	400	100	200	400
ТС	30	23	19,4	28,8	0,11	0,20	0,16
	80	42,7	60	73,4	0,34	0,3	0,3
ПД	30	21,6	39	40	0,29	0,32	0,26
	80	63	81	100	0,21	0,25	0,23

Параметры деформации определяются из опытов используя экспериментальные зависимости  $\varepsilon_v = f(\varepsilon_1)$  и  $(\sigma'_1 - \sigma'_3) = f(\varepsilon_1)$ , полученные для условий осесимметричной (1) и плоской деформации (2)

$$\frac{\Delta \varepsilon_v}{\Delta \varepsilon_1} = 1 - 2\nu, \quad \frac{\Delta(\sigma'_1 - \sigma'_3)}{\Delta \varepsilon_1} = E, \quad (1)$$

$$\frac{\Delta \varepsilon_v}{\Delta \varepsilon_1} = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu}, \quad \frac{\Delta(\sigma'_1 - \sigma'_3)}{\Delta \varepsilon_1} = \frac{E}{1 - \nu^2}. \quad (2)$$

Из этих таблиц видно влияние вида испытаний на параметры прочности и деформируемости. Значения секущего модуля деформации E<sub>50</sub> соответствуют 50% максимальной разности напряжений  $(\sigma'_1 - \sigma'_3)$ . Испытания показывают на то, что угол внутреннего трения, полученный из испытаний в условиях плоской деформации больше чем значений угла внутреннего трения, полученные из испытаний трехосного сжатия и прямого среза. Модуль деформации оказывается также большим в условиях плоской деформации.

## Определение угла внутреннего трения

Угол внутреннего трения  $\varphi$ , как и силы сцепления  $c$  являются параметрами условия прочности Мора – Кулона

$$\tau = \sigma \operatorname{tg} \varphi + c$$

и определяются из испытаний грунтов в условиях прямого среза и трехосного осесимметричного сжатия при различных уровнях напряжений  $\sigma$ . Используя результаты трехосных испытаний предельную огибающую Мора – Кулона можно построить различным образом, так как показано на рис. 2 а, б, с.

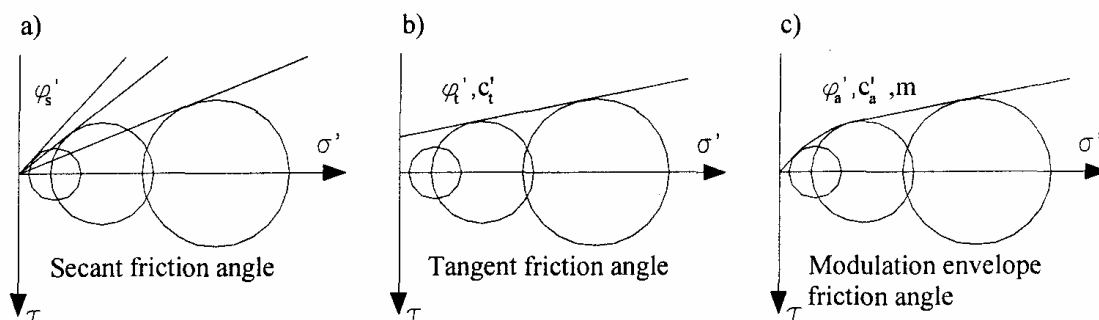


Рис. 2 . Предельные круги Мора

На рис. 2 а, грунт является чисто фрикционным материалом (песок) и его прочность определяется только трением. Условие прочности для каждого круга Мора (напряженного состояния) имеет вид

$$\tau = \sigma \operatorname{tg} \varphi_s . \quad (3)$$

Предельная прямая может быть также получена как лучшая касательная ко всем кругам Мора (рис. 2 б) и условие прочности может быть записано в виде

$$\tau = c_t + \sigma_t \operatorname{tg} \varphi_t . \quad (4)$$

В последнем выражении параметр  $c_t$  для песчаного грунта не превышает 2 - 5 кПа и как правило не учитывается. Очевидно, что если использовать

метод секущих, то прочность на сдвиг будет переоценена на высоких уровнях напряжений  $\sigma$  и недооценена на низких уровнях напряжений. Поэтому надежность расчетов прочности будет зависеть от того совпадут или нет условия испытаний грунта в лаборатории с уровнем напряжений в основании сооружений.

С целью учета влияния уровня напряжений на прочность грунта, в особенности на малых уровнях напряжений используются условия прочности предложенные Соколовским. В.В. Предельная огибающая в этом случае имеет различный наклон в области малых и высоких нормальных напряжений.

### Дилатанция

При нагружении грунта за характеристическим порогом (рис. 3) грунт при сдвиге расширяется. Расширение грунта при сдвиге или увеличение объема грунта при сдвиге называется дилатанцией. Используя результаты испытаний грунта в условиях трехосного сжатия можно построить круги Мора для деформаций, так как это показано на рис. 3 а.

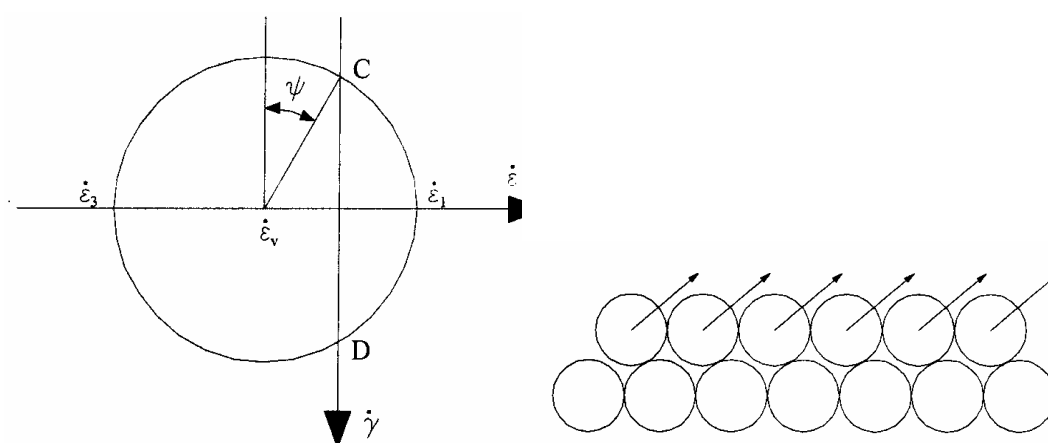


Рис. 3. Геометрическое представление угла дилатанции для условий плоской деформации

Угол дилатанции  $\psi$  определяется для условий плоской деформации из условия

$$\sin \psi = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}, \quad (5)$$

а для условий трехосного сжатия из условия

$$\sin \psi = \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_v - 2\varepsilon_1}, \quad (6)$$

где  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_v$  - скорости осевой и объемной деформаций.

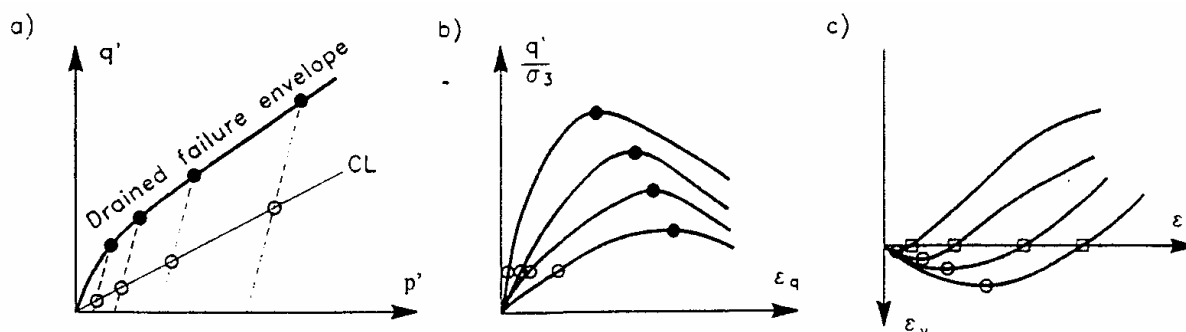


Рис. 4. Результаты консолидировано дренированных испытаний (Ibsen, 1995)

На рис. 4 показаны результаты консолидировано-дренированных испытаний песка при различном всестороннем давлении. Из рис. 4 б видно, что разрушение наступает когда эффективное девиаторное напряжение  $q$  достигает максимального значения, отмеченное темными кружками. Это состояние соответствует предельной прочности грунта. Если образец грунта нагружать далее, то девиаторные напряжения уменьшаются до остаточной прочности песка. В этом состоянии деформирование песка происходит при постоянном объеме и девиаторном напряжении. На рис. 4 а, показана предельная огибающая построенная по значениям эффективного среднего

напряжения  $p$  и предельного значения прочности (темные кружки на рис. 4 б).

Лабораторные испытания показывают, что существует так называемый характеристический порог при котором наблюдается переход от условий сжатия образца к его расширению (дилатанции). Деформации, соответствующие характеристическому порогу показаны на рис. 4 с открытым кружком и соответствуют минимальному объему. Если теперь отобразить на рис. 4 а значения напряжений, соответствующие данному характеристическому порогу, то через них можно провести прямую линию CL, которая разделяет пространство  $(p, q)$  на две области с различным механизмом деформации:

- под линией CL напряженное состояние вызывает сжатие;
- над линией CL напряженное состояние приводит к расширению.

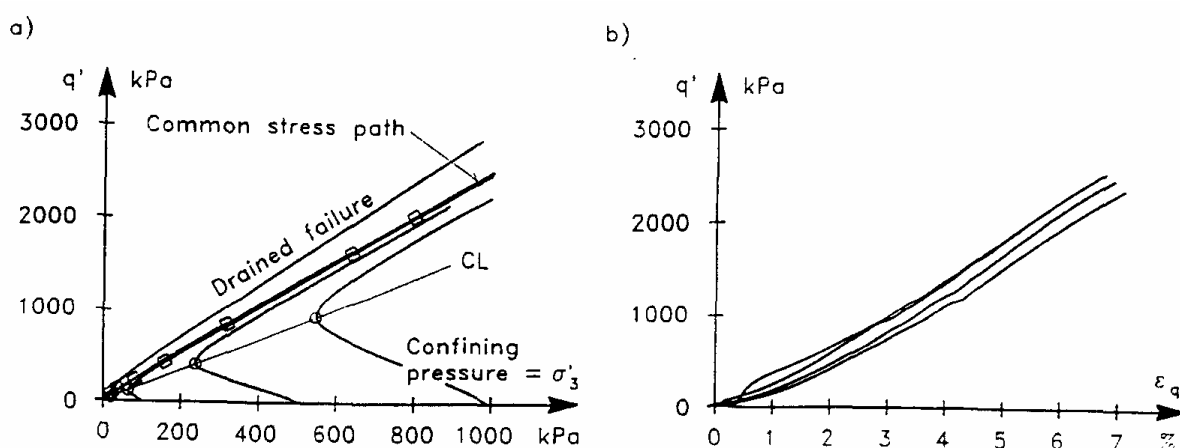


Рис. 5. Результаты испытаний консолидированно-недренированных испытаний (Ibsen,1995). Ibsen L.B. The static and dynamic strength of sand. Soil mechanics laboratory, Aalborg University, Denmark, 1995

В течение недренированных испытаний (рис. 5) также проявляется характеристическое состояние, но здесь оно контролируется траекторией эффективных напряжений. В ходе недренированных трехосных испытаний поровое давление вначале возрастает, препятствуя сжатию песка. При этом эффективные напряжения уменьшаются, как показано на рис. 5 а. Когда девиаторное напряжение приближается к характеристической линии поровое



давление стабилизируется ( $\Delta u = 0$ ) и достигает максимального значения. Если девиаторное напряжение возрастает далее, то поровое давление уменьшается, а эффективная траектория напряжений приближается к траектории полных напряжений, значения которых отмечены на рис. 4 а квадратиками. Эта траектория напряжений характеризует недренированную прочность песка.

В связи с тем, что экспериментально сложно определить угол дилатанции, то делаются попытки определить угол дилатанции  $\psi$  через угол внутреннего трения  $\varphi$ . Steenfelt, 1992 (Steenfelt J.S. Strength and dilatancy revised. Miscellaneous papers in civil engineering - 1992, 35<sup>th</sup> Anniversary of Danish Engineering Academy. Polyteknisk Forlag, 1992, pp. 155 – 186.) выполнив опыты с цилиндрическими и кубическими образцами песка размером от 70x70 до 250x250 мм предложил следующую зависимость между  $\varphi$  и  $\psi$ :

$$\varphi_{\max} - \varphi_{\text{crit}} = 0,8\psi_{\max} = 3I_R, \quad (7)$$

где  $\varphi_{\max}$  - угол внутреннего трения на пике напряжений;  $\varphi_{\text{crit}}$  - критический угол внутреннего трения;  $\psi_{\max}$  - угол дилатанции при разрушении;  $I_R$  - индекс относительной плотности, определяемый из выражения:

$$I_R = I_D [Q - \ln(p)] - R, \quad (8)$$

где

$$I_D = \frac{e_{\max} - e}{e_{\max} - e_{\min}}, \quad (9)$$

относительная плотность;  $Q$  - коэффициент учитывающий минералогический состав песка и сжимаемость;  $p$  – среднее эффективное напряжение;  $R$  – коэффициент корреляции;  $e_{\max}, e_{\min}, e$  - текущее, максимально и минимальное значения коэффициента пористости.

Ниже приведены результаты трехосных испытаний песка для определения параметров прочности и деформируемости. Было выполнено две серии опытов с начальными значениями коэффициента пористости  $e = 0,61$  и  $e = 0,70$ . Значения секущего угла внутреннего трения,  $\varphi$ , и угла дилатанции,  $\psi$ ,

приведены в табл. 4,5. Параметры деформируемости: модуль упругости, E, и коэффициент Пуассона приведены в табл. 6.

Табл.4. Результаты трехосных испытаний, коэффициент пористости 0,61

Опыт No.	$\sigma_1$ , [kPa]	$\sigma_3$ , [kPa]	p' [kPa]	e	$\varphi_{sec}$ , [°]	$\psi$ , [°]
9301_03	792.32	160.20	371.24	0.655	41.51	14.99
9301_07	1537.96	319.95	726.05	0.657	40.95	14.08
930108	2890.80	640.10	1390.40	0.653	39.60	12.93
9301_32	3514.00	800.10	1704.80	0.646	38.98	12.49

Табл.5. Результаты трехосных испытаний, коэффициент пористости 0,70

Опыт No.	$\sigma_1$ , [kPa]	$\sigma_3$ , [kPa]	p' [kPa]	e	$\varphi_{sec}$ , [°]	$\psi$ , [°]
930121	654.83	160.00	324.94	0.727	37.39	9.72
9301_27	1293.87	320.00	644.62	0.727	37.12	9.52
9301_28	2450.84	640.00	1243.68	0.724	35.86	8.64
930129	2987.80	800.00	1529.40	0.718	35.28	7.00

Табл.6. Результаты трехосных испытаний: модуль деформации и коэффициент Пуассона

Коэффициент пористости, e= 0.61					Коэффициент пористости, e= 0.70				
Опыт No.	$\sigma_1$ , [kPa]	$\sigma_3$ , [kPa]	E [MPa]	$\nu$	Опыт No.	$\sigma_1$ , [kPa]	$\sigma_3$ , [kPa]	E [MPa]	$\nu$
9301_03	792.32	160.20	87.76	0.30	930121	654.83	160.00	50.62	0.32
9301_07	1537.96	319.95	105.38	0.38	9301_27	1293.87	320.00	94,64	0.35
9301_08	2890.80	640.10	122.82	0.38	930128	2450.84	640.00	92.72	0.40
9301_32	3514.00	800.10	93.38	0.40	9301_29	2987.80	800.00	76.73	0.35

Таблицы из работы: Behaviour of bucket foundation in sand.

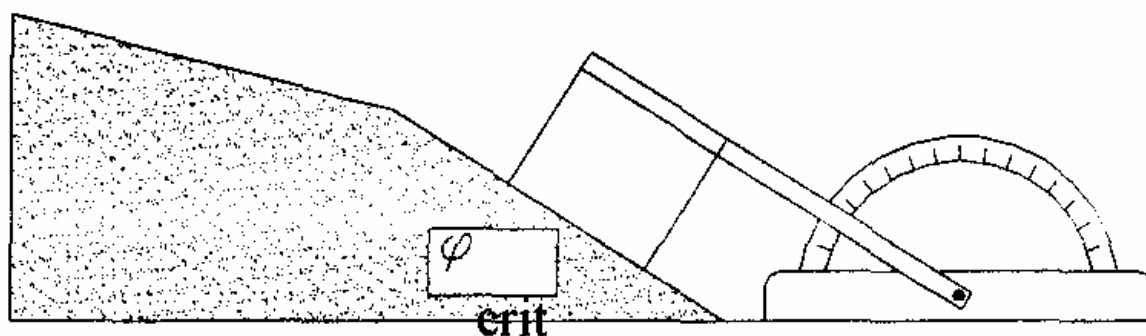


Рис. 6. Определение критического угла внутреннего трения,  $\varphi_{crit}$

Для исследуемого песка испытания показали, что  $\varphi_{crit} = 32,2^{\circ}$ .

### Подгонка углов трения и дилатанции

Уравнение (7) можно записать, используя определенные параметры, в виде:

$$\varphi_{max} - \varphi_{crit} = X\psi_{max} = 3\left[\frac{e_{max} - e}{e_{max} - e_{min}}\right](Q - \ln(p)) - R, \quad (10)$$

$$\varphi_{max} - 32,2 = X\psi_{max} = 3\left[\frac{0,854 - e}{0,854 - 0,549}\right](10 - \ln(p)) - R. \quad (11)$$

Для определения параметров прочности  $\varphi$  и  $\psi$  на данном уровне напряжений и коэффициенте пористости, результаты испытаний в табл. 4,5 должны быть подогнаны с использованием уравнения (11). Уравнение (11) разделяется на два уравнения

$$\varphi_{max} - 32,2 = 3\left[\frac{0,854 - e}{0,854 - 0,549}\right](10 - \ln(p)) - R; \quad (12)$$

$$X\psi_{max} = 3\left[\frac{0,854 - e}{0,854 - 0,549}\right](10 - \ln(p)) - R \quad (13)$$

с целью подгонки угла внутреннего трения и угла дилатанции отдельно. Начальные значения, касающиеся секущего угла внутреннего трения

приведены в табл. 4,5 используются при подгонке к уравнению (12) для определения параметра корреляции R и далее эти же параметры подгоняются к углу дилатации для определения коэффициента X. Процедура подгонки выполнена с использованием пакета MATLAB, процедура fri\_dila.m. Уравнения (12) и (13) подгоняются для обоих значений коэффициента пористости 0,61 и 0,70 для получения представительных значений параметров корреляции R и X.

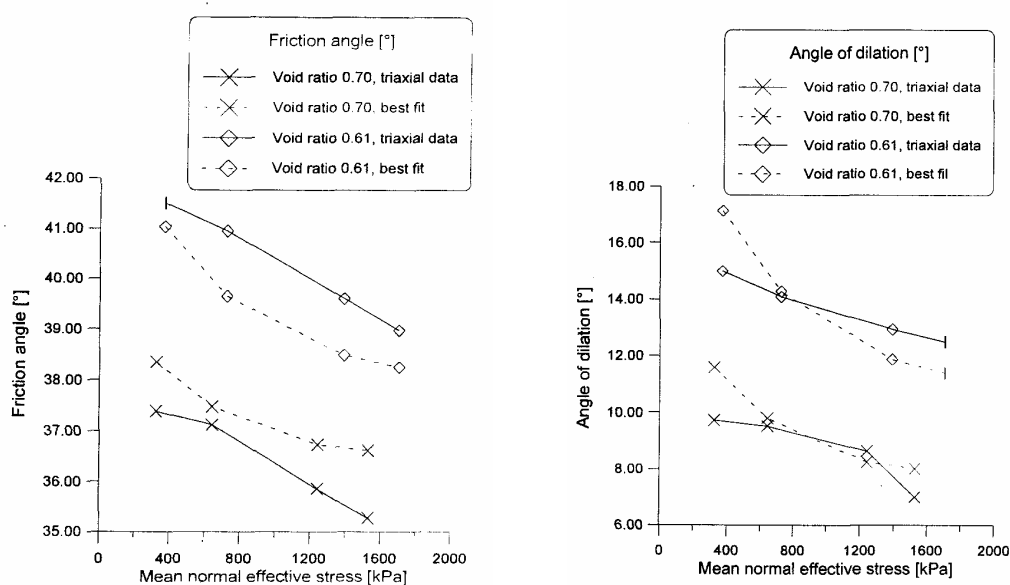


Рис. 7. Угол внутреннего трения – а и угол дилатации – б

Углы внутреннего трения, определенные из трехосных испытаний подогнаны уравнением (12) при этом параметр  $R = 0,26$  с ошибкой вычисления

$$TOL = \sum_{j=1}^n (y_{\text{опыт}} - y_{\text{подг}})^2, \quad (14)$$

$$\text{Ошибка} = \sqrt{TOL},$$

равной 2,67.

В табл. 7 приведены подогнанные данные с ошибкой в процентах для каждого опыта. Средняя ошибка равна 2,4% при использовании уравнения (12), что вполне удовлетворительно.

Табл. 7. Угол внутреннего трения

Коэффициент пористости 0.61					
Опыт No.	$\sigma_3$ , [kPa]	$p'$ [kPa]	$\varphi_{sec}$ , [°]	$\varphi_{fit}$ , [°]	Ошибка, [%]
9301_03	160.20	371.24	41.51	41.03	1.2
9301_07	319.95	726.05	40.95	39.65	3.2
930108	640.10	1390.40	39.60	38.49	2.8
9301_32	800.10	1704.80	38.98	38.26	1.9
Коэффициент пористости 0.70					
Опыт No.	$\sigma_3$ , [kPa]	$p'$ [kPa]	$\varphi_{sec}$ , [°]	$\varphi_{fit}$ , [°]	Ошибка, [%]
9301_21	160.00	324.94	37.39	38.35	2.6
9301_27	320.00	644.62	37.12	37.48	1.0
9301_28	640.00	1243.68	35.86	36.73	2.4
930129	800.00	1529.40	35.28	36.62	3.8

Угол дилатации определенный из трехосных испытаний подобным образом был подогнан уравнением (13) и  $X = 3.28$  при ошибке 1,66. На рис. 7 приведен угол дилатации из восьми испытаний и результаты подгонки с использованием уравнения (13).

В табл. 8 приведены подогнанные данные при средней ошибке равной 9,2%. Из табл. 8 видно, что неопределенность в подгонке существует на низких уровнях напряжений.

Табл. 8. Угол дилатации

Коэффициент пористости 0.61					
Опыт No.	$\sigma_3$ , [кПа]	$p'$ [кПа]	$\psi_{sec}$ , [°]	$\psi_{fit}$ [°]	Ошибка, [%]
9301_03	160.20	371.24	14.99	17.13	14.3
930107	319.95	726.05	14.08	14.27	1.3
9301_08	640.10	1390.40	12.93	11.87	8.2
9301_32	800.10	1704.80	12.49	11.40	8.7
Коэффициент пористости 0.70					
Опыт No.	$\sigma_3$ , [кПа]	$p'$ [кПа]	$\psi_{sec}$ , [°]	$\psi_{fit}$ [°]	Ошибка, [%]
930121	160.00	324.94	9.72	11.59	19.2
9301_27	320.00	644.62	9.52	9.80	2.9
9301_28	640.00	1243.68	8.64	8.25	4.5
9301_29	800.00	1529.40	7.00	8.01	14.4

Уравнение (11) с учетом полученных параметров можно переписать в виде

$$\varphi_{max} - 32,2 = 0.545\psi_{max} = 3\left[\frac{0,854 - e}{0,854 - 0,549}\right](10 - \ln(p)) + 0.26]. \quad (15)$$

Из уравнения (15) угол внутреннего трения и угол дилатации могут быть определены для данного уровня напряжений и коэффициента пористости. Уравнение (15) используется для определения параметров прочности в численных расчетах, когда действующий уровень напряжений и коэффициент пористости определены в лаборатории.

От секущего угла внутреннего трения к касательному углу внутреннего трения и определения параметра сил сцепления, входящих в условие прочности Друкера – Прагера можно использовать следующие выражения:

$$\varphi_{\tan} = 3 \left[ \left( \frac{0,854 - e}{0,854 - 0,549} \right) (10 - \ln(p)) + 0.26 \right] + 32.2 - 3 \left( \frac{0,858 - e}{0,858 - 0,549} \right); \quad (16)$$

$$\psi_{\max} = 3 \left[ \left( \frac{0,854 - e}{0,854 - 0,549} \right) (10 - \ln(p)) + 0.26 \right] / 0,545; \quad (17)$$

$$c = 0,065 p \left( \frac{0,854 - e}{0,854 - 0,549} \right). \quad (18)$$

### Упругие параметры

Модуль упругости определяется как наклон первых приращений напряжений зависимости  $\varepsilon_1 = f(\sigma_1)$ . Значения модуля деформации и коэффициента Пуассона для различных уровней напряжений приведены в табл. 6.

Зависимость модуля деформации от уровня напряжений может быть представлена в виде выражения предложенного Lade (1996)

Lade P.V. Constitutive modeling of frictional materials. Department of Civil Engineering, The Johns Hopkins University, 1996.

$$E = K_{ur} p_a \left( \frac{\sigma_3}{p} \right)^n, \quad (19)$$

где  $E$  – модуль упругости;  $K_{ur}$  и  $n$  – безразмерные константы;  $p_a$  – атмосферное давление (101,25 кПа);  $\sigma_3$  – всестороннее давление.

Константы  $K_{ur}$  и  $n$  определяются также путем подгонки результатов опытов с выражением (19) с использованием пакета Matlab, табл. 3.8.

Табл. 9. Параметры уравнения (19)

Коэффициент пористости	0.61	0.70
$K_{ur}$	880	590
$n$	0.10	0.20
Ошибка, [МПа]	23.82	28.69

Табл. 10. Оценка точности определения модуля деформации

Коэффициент пористости 0.61				
Опыт No.	$\sigma_3$ , [kPa]	E [MPa]	E <sub>fit</sub> [MPa]	Ошибка, [%]
9301_03	160.20	87.76	93.71	6.8
930107	319.95	105.38	101.12	4.1
9301_08	640.10	122.82	109.14	11.1
9301 32	800.10	93.38	111.84	19.7
Коэффициент пористости 0.70				
Опыт No.	$\sigma_3$ , [kPa]	E [MPa]	E <sub>fit</sub> [MPa]	Ошибка, [%]
930121	160.00	50.62	65.42	29.31
9301_27	320.00	94.64	75.20	20.50
9301_28	640.00	92.72	86.38	6.80
9301_29	800.00	76.73	90.32	17.71

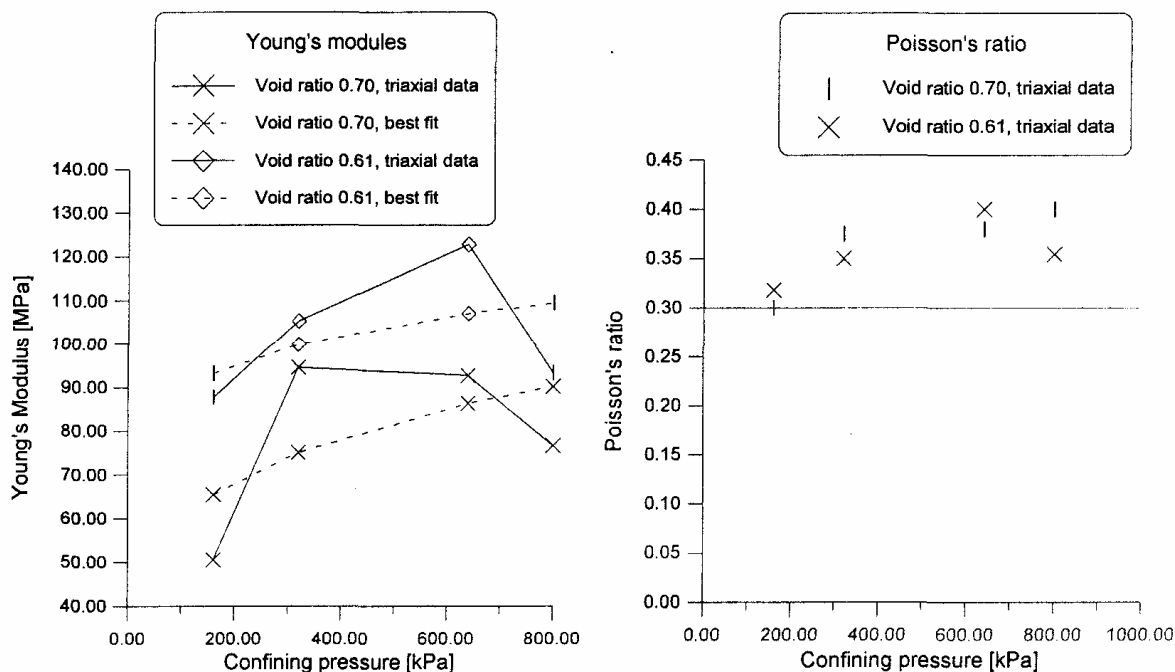


Рис. 8. Модуль упругости – а) и коэффициент Пуассона – б)

На рис. 8 модуль деформации и коэффициент Пуассона получены с использованием данных опытов и аппроксимации.