

АКАДЕМИЯ СТРОИТЕЛЬСТВА И АРХИТЕКТУРЫ СССР

ВСЕСОЮЗНЫЙ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ВОДОСНАБЖЕНИЯ, КАНАЛИЗАЦИИ, ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ СООРУЖЕНИЙ
И ИНЖЕНЕРНОЙ ГИДРОГЕОЛОГИИ
„ВОДГЕО“

Лаборатория земляных сооружений
и полевых исследований
ИНФОРМАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ—№ 7

М. В. МАЛЫШЕВ

**Приближенное решение
плоской задачи теории предельного равновесия
сыпучей среды**

Москва — 1967

Редактор проф. Б. Н. Жемочкин.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория предельного равновесия сыпучей среды, важность которой для практических целей не требует особых пояснений, получила свое значительное развитие главным образом в последнее время. В 1942 году вышла в свет фундаментальная работа чл.-корр. АН СССР В. В. Соколовского [8], где был решен целый ряд практических задач статики сыпучей среды методом численного интегрирования основной системы уравнений, определяющей ее предельное равновесие.

В 1948 г. вышла работа С. С. Голушкевича [3], который применил графоаналитический прием для решения тех же задач предельного равновесия земляных масс. Второе издание (1954 г.) книги В. В. Соколовского было пополнено целым рядом новых решений по сравнению с первым ее изданием. В 1953 г. была опубликована работа В. Г. Березанцева [1], посвященная решению осесимметричной задачи предельного равновесия сыпучей среды. Поскольку процесс вычисления методом конечных разностей без применения быстродействующих счетных машин в каждом отдельном случае является достаточно трудоемким, то представляют интерес и приближенные решения, точность которых может быть оценена и в ряде случаев не выходит за пределы допустимой. К числу таких решений относятся решения А. И. Говядинова [2] и Н. А. Малявинского [7]. В настоящей работе также дается приближенный прием интегрирования исходной системы уравнений предельного равновесия сыпучей среды в условиях плоской задачи, основанный на применении линеаризирующей аппроксимации. Для того чтобы проанализировать точность полученных результатов, рассмотрено в качестве примеров несколько задач, для которых имеются точные решения, и произведена соответствующая оценка погрешностей.

§ 1. Исходные уравнения

Уравнения равновесия элементарного объема сплошной весомой среды для рассматриваемого нами случая плоской задачи в прямоугольной системе координат (x, y) (рис. 1, а) имеют вид [9]:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \gamma,$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} = 0, \quad (1,1)$$

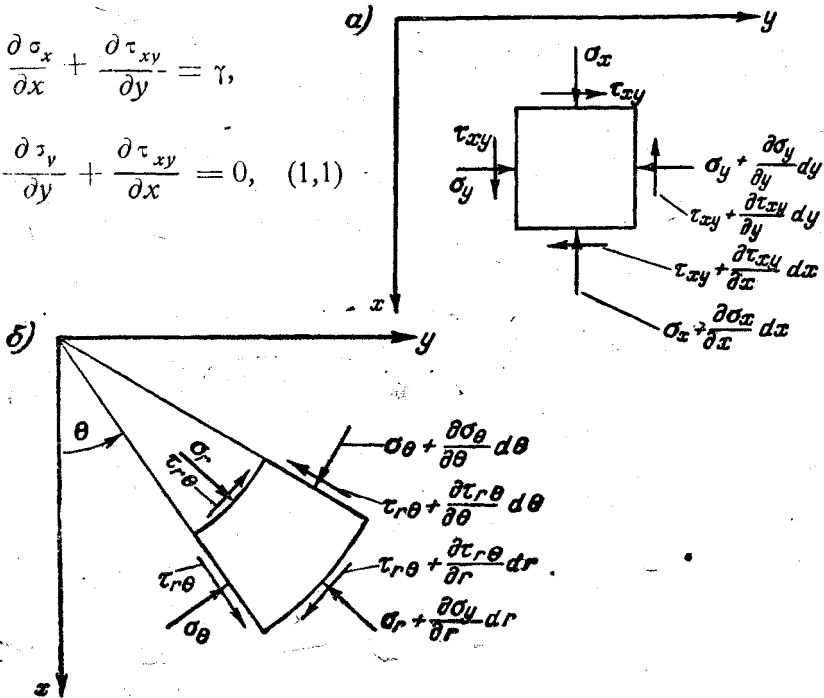


Рис. 1

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ — компоненты нормальных и касательного напряжений;
 γ — объемный вес среды.

Здесь направление оси x принято совпадающим с направлением действия объемных сил веса, а ось y направлена по горизонтали вправо.

Те же уравнения равновесия, но в полярных координатах (r, θ) (рис. 1,б) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= \gamma \cos \theta, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= -\gamma \sin \theta, \end{aligned} \quad (1,2)$$

где $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ — компоненты нормальных и касательного напряжений;

γ — объемный вес среды.

Угол θ отсчитывается от вертикали против часовой стрелки. Как известно [9], [6], уравнения (1,1) удовлетворяются тождественно, если имеется функция напряжений $\varphi(x, y)$, связанная с компонентами напряжений следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \gamma x, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \xi_0 \gamma x - s, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (1,3)$$

где ξ_0 — коэффициент бокового давления грунта;

s — величина, зависящая от сцепления и угла внутреннего трения.

Аналогичным образом уравнения (1,2) удовлетворяются тождественно, если имеется такая функция $\varphi(r, \theta)$, что

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \gamma r (\cos^2 \theta + \xi_0 \sin^2 \theta) \cos \theta - \\ &\quad - s_1 \sin^2 \theta; \end{aligned} \quad (1,4)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \gamma r (\sin^2 \theta + \xi_0 \cos^2 \theta) \cos \theta - s_1 \cos^2 \theta;$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) - \frac{\gamma r}{2} (1 - \xi_0) \cos \theta \sin 2\theta - \frac{s_1}{2} \sin 2\theta.$$

Функция напряжений φ должна удовлетворять уравнению предельного равновесия, связывающему между собой компоненты напряжений рассматриваемой среды, подробный вывод которого имеется в фундаментальной работе В. В. Соколового [8], а также в других работах [1], [3], [11]. Это уравнение соответствует частному случаю условия прочности Мора, используемому обычно применительно к сыпучим и хрупким материалам, — случаю, когда огибающая предельных кругов прямолинейна. В качестве характеристик прочности сыпучей среды принимаются параметры ρ и κ , именуемые соответственно углом внутреннего трения и сцепления. Эти параметры при прямолинейной огибающей предельных кругов Мора не зависят от напряженного состояния.

Указанное условие прочности имеет следующий вид [11]:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3 + 2\kappa \operatorname{ctg} \rho} = \sin \rho, \quad (1,5)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — соответственно наибольшее, среднее и наименьшее главные напряжения ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$).

Таким образом, из условия прочности Мора вытекает то обстоятельство, что величина среднего главного напряжения σ_2 не влияет на прочность грунта.

Условие (1,5) может быть записано при помощи диаграммы Мора, представленной на рис. 2, следующим образом:

$$\frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}{\sigma_x + \sigma_y + 2\kappa \operatorname{ctg} \rho} = \sin \rho \quad (1,6)$$

или, что то же самое

$$\frac{\sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2}}{\sigma_r + \sigma_\theta + 2\kappa \operatorname{ctg} \rho} = \sin \rho. \quad (1,7)$$

Подставляя в (1,6) и (1,7) соответственно (1,3) и (1,4), получаем одно нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции напряжений φ . Таким образом, задача сводится к отысканию функции φ , удовлетворяющей соответственно уравнению (1,6) или (1,7), а также граничным условиям рассматриваемой задачи.

Это уравнение допускает ряд замкнутых решений для простейших задач. В общем же случае приходится прибегать к численному интегрированию по методу В. В.

Соколовского [8] или С. С. Голушкевича [3]. Однако данное уравнение позволяет ввести весьма простую линеаризацию

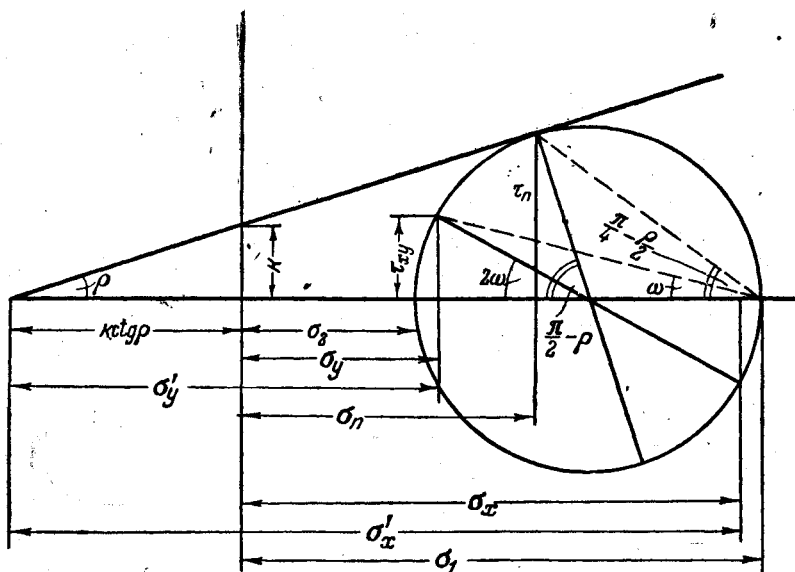


Рис. 2

цию, вследствие чего имеется возможность получения общего интеграла в замкнутой форме. Описание такого преобразования приводится в следующем параграфе.

§ 2. Линеаризация уравнения предельного равновесия

Предварительно рассмотрим функцию $\sqrt{1 + \psi^2}$, которая входит, как это будет видно далее, в качестве множителя в преобразованное уравнение предельного равновесия. Представим эту функцию линейной $A\psi + B$ в пределах изменения ψ от нуля до единицы с тем, чтобы относительное отклонение аппроксимирующей функции от заданной на концах и в середине было бы минимальным и одним и тем же.

Относительное отклонение δ равно отношению разности аппроксимируемой и аппроксимирующей функций к первой, т. е.

$$\delta = \frac{\sqrt{1 + \psi^2} - (A\psi + B)}{\sqrt{1 + \psi^2}} = 1 - \frac{A\psi + B}{\sqrt{1 + \psi^2}} \quad (2,1)$$

Для отыскания максимального значения в средней части имеем:

$$\frac{d\delta}{d\psi} = 0, \quad (2,2)$$

откуда

$$\psi = \frac{A}{B} \quad (2,3)$$

и
$$\delta_{\text{макс}} = 1 - \sqrt{A^2 + B^2}. \quad (2,4)$$

При $\psi = 0$ по (2,1)

$$\delta_{\psi=0} = 1 - B \quad (2,5)$$

и при $\psi = 1$ по (2,1)

$$\delta_{\psi=1} = 1 - \frac{A+B}{\sqrt{2}}. \quad (2,6)$$

Для определения значений коэффициентов A и B имеем следующую систему уравнений:

$$\delta_{\psi=0} = \delta_{\psi=1}; \quad (2,7)$$

$$\delta_{\psi=0} = -\delta_{\psi=1} \frac{A}{B}.$$

После подстановки в (2,7)—(2,5), (2,6) и (2,4) получаем:

$$B = \frac{A+B}{\sqrt{2}}. \quad (2,8)$$

$$\sqrt{A^2 + B^2} + B = 2.$$

Решая систему (2,8), имеем следующие значения A и B :

$$A = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}+1} \approx 0,3978; \quad (2,9)$$

$$B = \frac{2}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}+1} \approx 0,9604.$$

Аналогичным образом можно получить линейную аппроксимацию функции $\sqrt{1+\psi^2}$ при изменении ψ в пределах от 1 до ∞ .

Относительное отклонение

$$\delta = 1 - \frac{\bar{A}\psi + \bar{B}}{\sqrt{1 + \psi^2}}, \quad (2,10)$$

откуда, пользуясь (2,2), (2,3) и, следовательно, (2,4), получаем:

$$\delta_{\text{макс}} = 1 - \sqrt{\bar{A}^2 + \bar{B}^2}. \quad (2,11)$$

При $\psi = 1$ по (2,10) имеем:

$$\delta_{\psi=1} = 1 - \frac{\bar{A} + \bar{B}}{\sqrt{2}}. \quad (2,12)$$

Чтобы получить δ при $\psi = \infty$, предварительно преобразуем (2,10) к следующему виду:

$$\delta = 1 - \frac{\bar{A} + \bar{B} \frac{1}{\psi}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\psi}\right)^2 + 1}}. \quad (2,13)$$

Переходя к пределу, имеем:

$$\delta_{\psi=\infty} = 1 - \bar{A}. \quad (2,14)$$

Решая систему, аналогичную (2,7),

$$\begin{aligned} \delta_{\psi=1} &= \delta_{\psi=\infty}, \\ \delta_{\psi=\infty} &= -\delta_{\psi=1} - \frac{\bar{A}}{\bar{B}}, \end{aligned} \quad (2,15)$$

после подстановки в нее (2,11), (2,12), (2,14), получим:

$$\bar{A} = \frac{2}{\sqrt{2(2 - \sqrt{2})} + 1} \approx 0,9604; \quad (2,16)$$

$$\bar{B} = \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2(2 - \sqrt{2})} + 1} \approx 0,3978.$$

Таким образом, мы видим, что

$$A' = \bar{B}, \quad (2,17)$$

$$B = \bar{A}.$$

Величина максимальной относительной погрешности $\delta_{\text{макс}}$ вследствие аппроксимации составляет:

$$\delta_{\text{макс}} = (1 - 0,9604) 100 = 3,96\%.$$

Вид функции $\sqrt{1 + \psi^2}$ и аппроксимирующих ее линейных функций на участке $0 \leq \psi \leq 1$

$$0,9604 + 0,3978 \psi \quad (2,18)$$

и на участке $1 \leq \psi \leq \infty$

$$0,3978 + 0,9604 \psi \quad (2,19)$$

представлен на фиг. 3.

Вернемся к уравнению предельного равновесия сыпучей среды (1,6), переписав его следующим образом:

$$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = (\sigma_x + \sigma_y + 2\kappa \operatorname{ctg} \rho) \sin \rho. \quad (1,6)$$

Введя обозначение [8]

$$\sigma_x = \kappa \bar{\sigma}'_x, \quad \sigma_y = \kappa \bar{\sigma}'_y, \quad \tau_{xy} = \kappa \bar{\tau}'_{xy}, \quad (2,20)$$

$$x = \frac{\kappa}{\gamma} \bar{x}', \quad y = \frac{\kappa}{\gamma} \bar{y}', \quad s = \kappa \bar{s},$$

где $\bar{\sigma}'_x, \bar{\sigma}'_y, \bar{\tau}'_{xy}, \bar{x}', \bar{y}', \bar{s}$ — безразмерные величины, приведем уравнение (1,6) к следующему виду:

$$\sqrt{(\bar{\sigma}'_x - \bar{\sigma}'_y)^2 + 4\bar{\tau}'_{xy}{}^2} = (\bar{\sigma}'_x + \bar{\sigma}'_y + 2 \operatorname{ctg} \rho) \sin \rho. \quad (2,21)$$

Обозначим далее

$$\frac{2 \bar{\tau}'_{xy}}{\bar{\sigma}'_x - \bar{\sigma}'_y} = \psi; \quad (2,22)$$

тогда, подставляя (2,22) в (2,21), получим:

$$x_1 (\bar{\sigma}'_x - \bar{\sigma}'_y) \sqrt{1 + \psi^2} = (\bar{\sigma}'_x + \bar{\sigma}'_y + 2 \operatorname{ctg} \rho) \sin \rho, \quad (2,23)$$

где $x_1 = \operatorname{sign}(\bar{\sigma}'_x - \bar{\sigma}'_y)$, поскольку выражение, стоящее перед корнем, обязательно должно быть положительным.

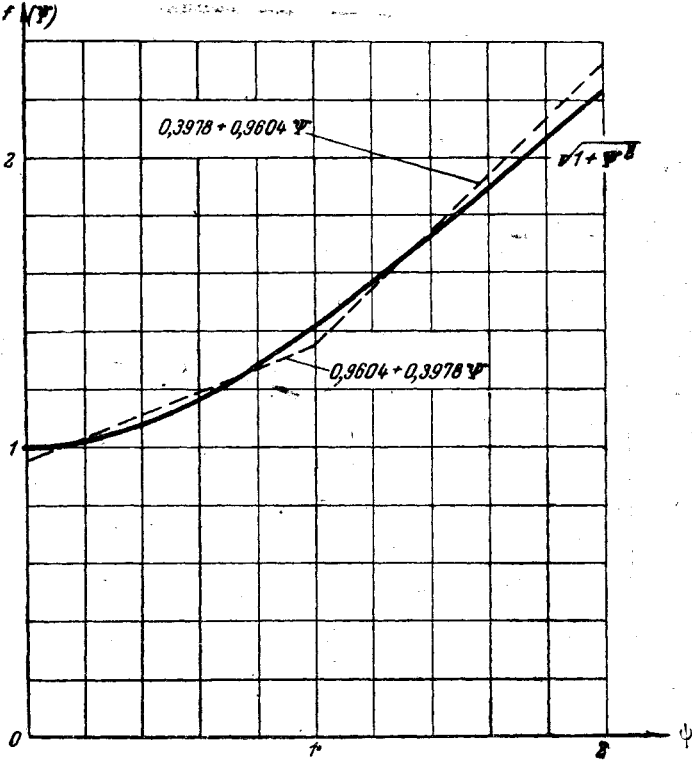


Рис. 3

Далее воспользуемся линейной аппроксимацией, изложению которой было посвящено начало настоящего параграфа:

$$\sqrt{1 + \psi^2} \approx \alpha + \beta \psi. \quad (2,24)$$

Числовые значения α и β уже известны. Однако, вопрос их выбора, а также знаков перед ними представляется весьма важным, в связи с чем специально приводятся

таблицы 1 и 2. Подставляя (2,24) в (2,23), получим с учетом (2,22):

$$x_1 \alpha (\bar{\sigma}'_x - \bar{\sigma}'_y) + 2 x_1 \beta \bar{\tau}_{xy} = (\bar{\sigma}'_x + \bar{\sigma}'_y + 2 \operatorname{ctg} \rho) \sin \rho. \quad (2,25)$$

Таблица 1

Разность $\bar{\sigma}'_x - \bar{\sigma}'_y$ или $\bar{\sigma}'_r - \bar{\sigma}'_\theta$	x_1
Положительная	+ 1
Отрицательная	- 1

Таблица 2

$\psi = \frac{2 \bar{\tau}'_{xy}}{\bar{\sigma}'_x - \bar{\sigma}'_y}$ или $\frac{2 \bar{\tau}'_{r\theta}}{\bar{\sigma}'_r - \bar{\sigma}'_\theta}$		α	β
от	до		
$\div \infty$	+ 1	0,3978	0,9604
$\div 1$	0	0,9604	0,3978
0	- 1	0,9604	- 0,3978
- 1	$-\infty$	0,3978	- 0,9604

Преобразовывая окончательно (2,25), будем иметь линейное относительно приведенных напряжений уравнение:

$$\bar{\sigma}'_x (x_1 \alpha - \sin \rho) - \bar{\sigma}'_y (x_1 \alpha + \sin \rho) + 2 x_1 \beta \bar{\tau}_{xy} = 2 \cos \rho. \quad (2,26)$$

Таким образом, (2,26) представляет собой уравнение предельного равновесия. В связи с этим целесообразно остановиться на геометрической интерпретации нового уравнения (2,26), которую можно иметь с помощью кругов Мора. Как известно [9], уравнение круга Мора для заданной точки следующее:

$$\left[\frac{(\bar{\sigma}'_x - \bar{\sigma}'_y)}{2} \right]^2 + \bar{\tau}'^2_{xy} = R^2, \quad (2,27)$$

где R — радиус круга Мора, выражаемый с помощью наибольшего главного напряжения σ_1 и наименьшего σ_2 следующим образом:

$$R = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2). \quad (2,28)$$

Имея в виду (2,22), легко представить (2,27) в виде:

$$\left| \frac{\bar{\sigma}'_x - \bar{\sigma}'_y}{2} \right| \sqrt{1 + \psi^2} = R. \quad (2,29)$$

Учитывая (2,24), имеем:

$$\frac{|\bar{\sigma}'_x - \bar{\sigma}'_y|}{2} (\alpha + \beta \psi) = R$$

или

$$\frac{\alpha(\bar{\sigma}'_x - \bar{\sigma}'_y)}{2} + \beta \bar{\tau}_{xy} = R', \quad (2,30)$$

откуда видно, что $\bar{\tau}_{xy}$ и разность $(\bar{\sigma}'_x - \bar{\sigma}'_y)$ связаны между собой линейно. Таким образом, мы видим, что круг Мора благодаря введенной аппроксимации заменяется многоугольником. Пользуясь тем, что пределы изменения ψ при неизменных коэффициентах α и β следующие $[-\infty; -1]$, $[-1; 0]$, $[0; +1]$ и $[+1; +\infty]$, получаем вместо круга Мора радиуса R правильный восьмиугольник, наименьшим образом уклоняющийся от него (рис. 4). Если в заданный многоугольник вписать окружность, то радиус ее r_1 будет составлять $r_1 = 0,9604 R$, а если описать окружность, то радиус описанной окружности $r_2 = \frac{R}{0,9604} = 1,0412 R$.

Оценим полученную погрешность с точки зрения угла внутреннего трения грунта. Если заданный угол внутреннего трения ρ , то из круга Мора можно легко получить, что для несвязного предельно-напряженного грунта

$$\sin \rho = \frac{2 R}{\sigma_x + \sigma_y}. \quad (2,31)$$

Если провести касательную к кругу, вписанному в аппроксимирующий многоугольник, то получим:

$$\sin \rho_1 = \frac{2 \cdot 0,9604 R}{\sigma_x + \sigma_y} \quad (2,32)$$

и к описанному

$$\sin \rho_2 = \frac{2 \cdot 1,0412 R}{\sigma_x + \sigma_y} \quad (2,33)$$

Сравнивая (2,31) с (2,32) и (2,33), находим, что мы получаем ошибку для синуса угла внутреннего трения в $3,96\%$ и для самого угла при значении $\rho = 30^\circ \pm 1^\circ 20'$, при $\rho = 45^\circ \pm 2^\circ 25'$.

При тех неточностях в определении угла внутреннего трения, с которыми мы имеем дело на практике, совер-

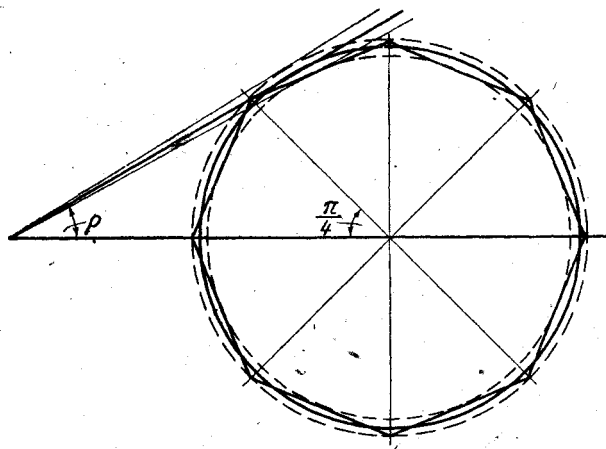


Рис. 4.

шенно естественно, что такая погрешность является допустимой.

В дальнейшем ошибка вследствие вводимой аппроксимации будет проанализирована, основываясь на имеющихся точных решениях некоторых задач теории предельного равновесия сыпучей среды.

§ 3. Решение линеаризованного уравнения предельного равновесия сыпучей среды

В связи с особенностями той или иной решаемой задачи полезно воспользоваться либо системой прямоугольных координат (x, y) , либо системой полярных координат (r, θ) . Поэтому и решение уравнений целесообразно иметь применительно к той и другой системе координат.

Для решения уравнений в системе декартовых координат воспользуемся выражениями (1,3) и (2,26). Предварительно преобразуем (1,3) с учетом (2,20) к следующему виду, положив:

$$\varphi = \frac{\kappa^3 \bar{\varphi}}{\gamma^2}; \quad (3,1)$$

тогда

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}^2} + \bar{x}; \quad \bar{\sigma}_y = \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{\xi}_0 \bar{x} - \bar{s}; \quad (3,2)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = - \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}}.$$

Подставляя (3,2) в (2,26), имеем:

$$b_1 \left[\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}^2} + \bar{x} \right] - b_2 \left[\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{\xi}_0 \bar{x} - \bar{s} \right] - \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} = \frac{\cos \rho}{\alpha_1 \beta}, \quad (3,3)$$

где

$$b_1 = \frac{\alpha_1 \alpha - \sin \rho}{2 \alpha_1 \beta},$$

$$b_2 = \frac{\alpha_1 \alpha + \sin \rho}{2 \alpha_1 \beta}$$

и

$$\bar{s} = \frac{2 \cos \rho}{\alpha_1 \alpha + \sin \rho}.$$

Преобразовывая далее (3,3), получаем:

$$b_1 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}^2} - b_2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} = (b_2 \bar{\xi}_0 - b_1) \bar{x}. \quad (3,4)$$

Будем искать частное решение уравнения (3,4) в форме:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} = & XY + \frac{a_{20}}{2} \bar{x}^2 + a_{11} \bar{x} \bar{y} + \frac{a_{02}}{2} \bar{y}^2 + \frac{a_{30}}{6} \bar{x}^3 + \\ & + \frac{a_{21}}{2} \bar{x}^2 \bar{y} + \frac{a_{12}}{2} \bar{x} \bar{y}^2 + \frac{a_{03}}{6} \bar{y}^3, \end{aligned} \quad (3,5)$$

где $X = X(x)$; $Y = Y(y)$;

a_{ik} — коэффициенты.

Подставляя (3,5) в (3,4), можно получить следующие уравнения, из которых определятся функции X , Y , а также необходимая для выполнения условия предельного равновесия связь между коэффициентами a_{ik} :

$$b_1 X Y'' - b_2 X'' Y - X' Y' = 0; \quad (3,6)$$

$$b_1 a_{02} - b_2 a_{20} - a_{11} = 0; \quad (3,7)$$

$$b_1 a_{12} - b_2 a_{30} - a_{21} = b_2 \xi_0 - b_1 \quad (3,8)$$

$$b_1 a_{03} - b_2 a_{21} - a_{12} = 0. \quad (3,9)$$

Выражая коэффициенты из (3,7) — (3,9), получим:

$$a_{11} = b_1 a_{02} - b_2 a_{20}; \quad (3,10)$$

$$a_{21} = b_1 a_{12} - b_2 a_{30} + b_1 - b_2 \xi_0; \quad (3,11)$$

$$a_{12} = \frac{1}{1 + b_1 b_2} (b_1 a_{03} - b_2^2 a_{30} + b_1 b_2 - b_2^2 \xi_0). \quad (3,12)$$

Подставляя (3,12) в (3,11), имеем:

$$a_{21} = \frac{b_1 (b_1 a_{03} + b_1 b_2 - b_2^2 \xi_0) - a_{30} (1 + 2 b_1 b_2) b_2}{1 + b_1 b_2} + b_1 - b_2 \xi_0. \quad (3,13)$$

Таким образом, из (3,10), (3,12) и (3,13) следует, что в (3,5) независимыми из 7 коэффициентов a_{ik} являются лишь 4, а именно a_{02} , a_{20} , a_{03} и a_{30} . Остальные коэффициенты выражаются через них. Разделим далее все члены уравнения (3,6) на $X Y$ [10]:

$$b_1 \left(\frac{Y''}{Y} \right) - b_2 \left(\frac{X''}{X} \right) - \left(\frac{X'}{X} \right) \left(\frac{Y'}{Y} \right) = 0. \quad (3,14)$$

Продифференцируем (3,14) по \bar{x} , откуда

$$-b_2 \left(\frac{X''}{X} \right)' - \left(\frac{X'}{X} \right)' \left(\frac{Y'}{Y} \right) = 0 \quad (3,15)$$

или

$$\frac{Y'}{Y} = -b_2 \frac{\left(\frac{X''}{X} \right)'}{\left(\frac{X'}{X} \right)'}. \quad (3,16)$$

Левая часть в (3,16) является только функцией \bar{y} , правая функцией только \bar{x} , следовательно, равенство (3,16) может иметь место лишь тогда, когда левая и правая части равны в свою очередь одной и той же постоянной величине λ .

Таким образом, мы имеем два дифференциальных уравнения:

$$Y' = \lambda_1 Y; \quad (3,17)$$

$$-b_2 \left(\frac{X''}{X} \right)' = \lambda_1 \left(\frac{X'}{X} \right)'. \quad (3,18)$$

Решая (3,17), легко получить:

$$Y = C_1 e^{\lambda_1 \bar{y}}. \quad (3,19)$$

Порядок уравнения (3,18) искусственно завышен, в связи с чем мы к нему обращаться не будем.

Подставив (3,19) в (3,6), получим после сокращения всех членов на $C_1 e^{\lambda_1 \bar{y}}$ уравнение

$$b_1 \lambda_1^2 X - b_2 X'' - \lambda_1 X' = 0, \quad (3,20)$$

решение которого

$$X = C_2 e^{\lambda_2 \bar{x}}; \quad (3,21)$$

причем λ_2 и λ_1 связаны между собой:

$$\lambda_2 = \lambda_1 \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4b_1 b_2}}{2b_2}. \quad (3,22)$$

Поскольку исходное уравнение линейно, то сумма отдельных решений будет являться также решением, в силу чего окончательно получим:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} = & \sum_{i=\kappa}^n C_i e^{\lambda_{1i}(\bar{y} + \lambda_{2i}\bar{x})} + \frac{a_{20}}{2} \bar{x}^2 + \left(b_1 a_{02} - b_2 a_{20} - \frac{\cos \rho}{-x_1 \beta} + \right. \\ & \left. + b_2 s \right) \bar{x}\bar{y} + \frac{a_{02}}{2} \bar{y}^2 + \frac{a_{30}}{6} \bar{x}^3 + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{b_1(b_1 a_{03} + b_1 b_2 - b_2^2 \xi_0) - a_{30}(1 + 2b_1 b_2) b_2}{1 + b_1 b_2} + b_1 - b_2 \xi_0 \right] \bar{x}^2 \bar{y} + \\ & + \frac{b_1 a_{03} - b_2^2 a_{30} + b_1 b_2 - b_2^2 \xi_0}{2(1 + b_1 b_2)} \bar{x} \bar{y}^2 + \frac{a_{03}}{6} \bar{y}^3; \quad (3,23) \end{aligned}$$

здесь $C_1, \lambda_{11}, a_{02}, a_{20}, a_{03}, a_{30}$ — произвольные постоянные величины.

Получим аналогичные решения в полярных координатах, в которых (2,26) будет иметь следующий вид:

$$\bar{\sigma}_r (x_1 \alpha - \sin \rho) - \bar{\sigma}_\theta (x_1 \alpha + \sin \rho) + 2 x_1 \beta \bar{\tau}_{r\theta} = 2 \cos \rho; \quad (3,24)$$

$$\sigma_r = \kappa \bar{\sigma}_r; \quad \sigma_\theta = \kappa \bar{\sigma}_\theta; \quad \tau_{r\theta} = \kappa \bar{\tau}_{r\theta}; \quad r = \frac{\kappa}{\gamma} \bar{r}; \quad s = \kappa \bar{s}. \quad (3,25)$$

Подставляя (1,4) в (3,24) с учетом (3,25) и (3,1), получим, приняв обозначения по (3,3) после преобразований:

$$\begin{aligned} & b_1 \left[\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \bar{\theta}^2} \right] - b_2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \bar{r}^2} - \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{\theta}} \right) = \\ & = \bar{r} \left\{ (b_1 - \xi_0 b_2) \cos \theta + (1 - \xi_0) \sin \theta - (1 - \xi_0) (b_1 + b_2) \cos^3 \theta - \right. \\ & \left. - (1 - \xi_0) \sin^3 \theta + \frac{\cos \rho}{x_1 \beta} + \bar{s}_1 \left[b_1 \sin^2 \theta - b_2 \cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta \right] \right\}; \end{aligned} \quad (3,26)$$

здесь \bar{s}_1 равно:

$$\bar{s}_1 = \frac{\cos \rho}{x_1 \beta (b_1 \sin^2 \theta - b_2 \cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta)} \quad (3,26a)$$

и, вообще говоря, является функцией θ , однако, это функция, слабо изменяющая свои значения при изменении θ , в силу чего ее можно принимать постоянной. Действительно, по (3,3) легко преобразовать выражение для \bar{s}_1 к следующему:

$$\bar{s}_1 = \frac{\cos \rho}{x_1 (\alpha \cos 2\theta + \beta \sin 2\theta) + \sin \rho}, \quad (3,26b)$$

и далее из приводимой таблицы видно, что выражение в круглых скобках близко к 0,9604. Небольшие колебания значений этой функции вызваны введением аппроксимации. Если бы задача решалась точно, то аппроксимире-

мая функция не зависела бы от θ и равнялась бы не 0,9604, а 1.

θ	± 60	± 50	± 40	± 30	± 20	± 10	0
$\alpha \cos 2\theta + \beta \sin 2\theta$	1,030	1,015	1,015	1,030	0,991	1,038	0,960

Будем искать частное решение уравнения (3,26) в форме

$$\bar{\varphi} = \bar{r}^{n+2} \Theta + \bar{r}^3 (D_1 \cos^3 \theta + D_3 \cos \theta + D_4 \sin \theta) - \frac{\bar{r}^2}{2} \frac{\cos \rho}{(b_2 - b_1) \alpha_1 \beta} + \frac{\bar{r}^2}{2} + \bar{D}_6 \cos^2 \theta, \quad (3,27)$$

где коэффициенты D_i имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} D_1 &= + \frac{1}{6} \left(1 - \xi_0 \right); \\ D_2 &= 0; \\ D_3 &= - \frac{(b_1 - b_2)(b_1 - 3b_2)}{2[1 + (b_1 - 3b_2)^2]}; \\ D_4 &= \frac{(b_1 - b_2)}{2[1 + (b_1 - 3b_2)^2]}; \\ D_5 &= D_7 = 0; \\ D_6 &= \bar{s}_1. \end{aligned} \quad (3,28)$$

Величина \bar{s}_1 является функцией угла θ вследствие введенной при решении задачи аппроксимации. Поэтому при дифференцировании \bar{s}_1 по θ следует условно считать s_1 величиной постоянной, от θ не зависящей.

В выражении (3,27) $\Theta = \Theta(\theta)$.

Подставляя (3,27) в (3,26), получаем с учетом (3,28) после сокращения на \bar{r}^n уравнение для определения функции Θ :

$$b_1 \Theta'' - (n+1) \Theta' + (n+2) [b_1 - b_2 (n+1)] \Theta = 0. \quad (3,29)$$

Решая (3,29), легко получить:

$$\Theta = Fe^{\lambda_3 \theta}, \quad (3,30)$$

где

$$\lambda_3 = \frac{n+1 \pm \sqrt{(n+1)^2 - 4(n+2)[b_1 - b_2(n+1)]} b_1}{2b_1}; \quad (3,31)$$

F — произвольная постоянная.

Поскольку исходное уравнение линейно, то сумма решений будет являться также решением, в силу чего:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} = & \sum_{i=\kappa}^n F_i \bar{r}^{i+2} e^{\lambda_{3i} \theta} + \bar{r}^3 \left[\frac{1}{6} (1 - \xi_0) \cos^3 \theta + \right. \\ & \left. + \frac{-(b_1 - b_2)(b_1 - 3b_2)}{2[1 + (b_1 - 3b_2)^2]} \cos \theta + \frac{(b_1 - b_2)}{2[1 + (b_1 - 3b_2)^2]} \sin \theta \right] - \\ - & \frac{\bar{r}^2 \cos \rho}{2\alpha_1 \beta} \left[\frac{\cos^2 \theta}{b_1 - \sin^2 \theta - b_2 \cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta} + \frac{1}{b_2 - b_1} \right]. \end{aligned} \quad (3,32)$$

В силу вышесказанного выражение в квадратных скобках в последнем члене формулы (3,32) следует условно при дифференцировании считать от θ не зависящим.

В формуле (3,32) λ_{3i} определяется из (3,31), в котором следует заменить n на i .

Таким образом, в настоящем параграфе нами получены интегралы уравнений предельного равновесия для среды, обладающей трением и сцеплением.

Особо следует рассмотреть случай, когда среда не обладает сцеплением, т. е. случай идеально-сыпучей среды, поскольку здесь преобразования по (2,20) и (3,25) лишены смысла.

Уравнение (1,6) после преобразования его с учетом (2,24) будет:

$$\sigma_x (\alpha_1 \alpha - \sin \rho) - \sigma_y (\alpha_1 \alpha + \sin \rho) + 2\alpha_1 \beta \tau_{xy} = 0. \quad (3,33)$$

Вводя обозначения по (3,3) и подставляя в (3,33)—(1,3), получим уравнение относительно функции φ .

Решая это последнее методом, аналогичным описанному, получим следующее выражение для функции напряжений φ^0 :

$$\begin{aligned} \varphi^0 = & \sum_{i=\kappa}^n C_i e^{\lambda_{1i}(y+\lambda_{2i}x)} + \frac{a_{20}}{2} x^2 + (b_1 a_{02} - b_2 a_{20}) xy + \\ & + \frac{a_{02}}{2} y^2 - \frac{1}{6} \left(\xi_0 - \frac{b_1}{b_2} \right) \gamma x^3 + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{b_1(b_1 a_{03} + b_1 b_2 - b_2^2 \xi_0) - (\xi_0 b_2 - b_1)(1 + 2b_1 b_2)}{1 + b_1 b_2} + \right. \\ & \left. + b_1 - b_2 \xi_0 \right] x^2 y - \frac{b_1 a_{03} + 2b_2(b_1 - b_2 \xi_0)}{2(1 + b_1 b_2)} xy^2 + \frac{a_{03}}{6} y^3, \end{aligned} \quad (3,34)$$

где $C_i, \lambda_{1i}, a_{02}, a_{20}$ и a_{03} — произвольные постоянные, а λ_{2i} выражается через λ_{1i} с помощью (3,22).

В полярных координатах функция напряжений φ , связанная с напряжениями формулами (1,4), имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi^0 = & \sum_{i=\kappa}^n F_i r^{i+2} e^{3i\theta} + \gamma r^3 \left[-\frac{1-\xi_0}{6} \cos^3 \theta - \right. \\ & \left. - \frac{(b_1 - b_2)(b_1 - 3b_2)}{2[1 + (b_1 - 3b_2)^2]} \cos \theta + \frac{b_1 - b_2}{2[1 + (b_1 - 3b_2)^2]} \sin \theta \right], \end{aligned} \quad (3,35)$$

что легко получить из выкладок, аналогичных приведенным выше.

§ 4. Оценка полученного решения

Для оценки полученного решения проведем сопоставление его с имеющимися точными решениями для простейших задач. Рассмотрим сначала задачу о простейшем напряженном состоянии для весомого грунта в случае, когда касательные напряжения τ_{xy} отсутствуют и, следовательно, направление главных осей совпадает с направлением осей x, y . Эта задача именуется задачей Ренкива и имеет следующее точное решение [8]:

$$\sigma_x = q + \gamma x,$$

$$\sigma_y = (q + \gamma x) \frac{1 \mp \sin \rho}{1 \pm \sin \rho} \mp \frac{2 \kappa \cos \rho}{1 \pm \sin \rho}, \quad (4,1)$$

$$\tau_{xy} = 0,$$

где q — величина пригрузки на поверхности.

Для получения приближенного решения той же задачи по изложенному выше способу следует воспользоваться функцией напряжений $\bar{\varphi}$ по (3,23), приняв $C_i = 0$, поскольку в данной задаче компоненты напряжений должны либо не зависеть от глубины, либо изменяться по линейному закону с глубиной. Напряжения определяются с помощью (3,2) и (2,20) следующим образом:

$$\sigma_x = \kappa \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} + \gamma x = \kappa a_{02} + \gamma x;$$

$$\sigma_y = \kappa \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} + \xi_0 \gamma x - s = \frac{b_1}{b_2} \gamma x + \kappa a_{20}; \quad (4,2)$$

$$\tau_{xy} = \kappa \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x \partial y} = \mp \frac{\kappa \cos \rho}{x_1 \beta} + \kappa a_{02} b_1 - \kappa a_{20} b_2 = 0.$$

Выражая из последнего уравнения κa_{20} и подставляя в выражение для σ_y , будем иметь, поскольку $\kappa a_{02} = q$:

$$\sigma_x = q + \gamma x;$$

$$\sigma_y = \frac{b_1}{b_2} (\gamma x + q) - \frac{\kappa \cos \rho}{b_2 x_1 \beta}; \quad (4,3)$$

$$\tau_{xy} = 0.$$

Учтя обозначения (3,3), получим окончательно:

$$\sigma_x = q + \gamma x;$$

$$\sigma_y = \frac{x_1 \alpha - \sin \rho}{x_1 \alpha + \sin \rho} (\gamma x + q) - \frac{2 \kappa \cos \rho}{x_1 \alpha + \sin \rho}; \quad (4,4)$$

$$\tau_{xy} = 0.$$

Поскольку $\tau_{xy} = 0$, то, следовательно, по (2,22) и $\psi = 0$.

В (4,1) верхние знаки соответствуют минимально напряженному состоянию, а нижние максимально напряженному [8]. Поэтому разность $\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_y$ в первом случае окажется положительной, а во втором — отрицательной, и по (2,23) в первом случае $x_1 = +1$, а во втором $x_1 = -1$, и, следовательно, по (2,18) $\alpha = 0,9604$.

Таким образом, формулы (4,4) будут следующими:

$$\sigma_x = q + \gamma x;$$

$$\sigma_y = \frac{0,9604 \mp \sin \rho}{0,9604 \pm \sin \rho} (q + \gamma x) \mp \frac{2\kappa \cos \rho}{0,9604 \pm \sin \rho}; \quad (4,5)$$

$$\tau_{xy} = 0.$$

Сравнение выражений (4,4) и (4,5) показывает, что они различаются лишь в отношении σ_y , причем ошибка не превышает величин, указанных в табл. 3.

Таблица 3

ρ°	Ошибка в % в определении σ_y			
	зона минимально напряженного состояния		зона максимально напряженного состояния	
	ошибка за счет 1 члена ф-лы (4,5)	ошибка за счет 2 члена ф-лы (4,5)	ошибка за счет 1 члена ф-лы (4,5)	ошибка за счет 2 члена ф-лы (4,5)
0	0	4,0	0	4,0
10	1,5	4,8	1,5	3,4
20	3,2	6,0	3,3	3,0
30	5,4	7,9	5,7	2,6
40	8,9	11,1	9,7	2,4

Рассмотрим задачу об идеально сыпучем предельно-напряженном невесомом клине, для которой имеется точное решение [5]. Нагрузка в этой задаче предполагается изменяющейся вдоль радиуса—вектора по степенному закону, однако, мы рассмотрим простейшие случаи постоянства ее вдоль радиуса—вектора (рис. 5,а) и изменения по закону треугольника (рис 5,б).

Компоненты напряжений при нагрузке, не меняющейся вдоль радиуса вектора, будут [5]:

$$\sigma_r = (1 + 2\text{tg}^2 \rho) C e^{2\theta \text{tg} \rho},$$

$$\sigma_{\theta} = C e^{2\theta \operatorname{tg} \rho},$$

$$\tau_{r\theta} = C \operatorname{tg} \rho e^{2\theta \operatorname{tg} \rho}, \quad (4,6)$$

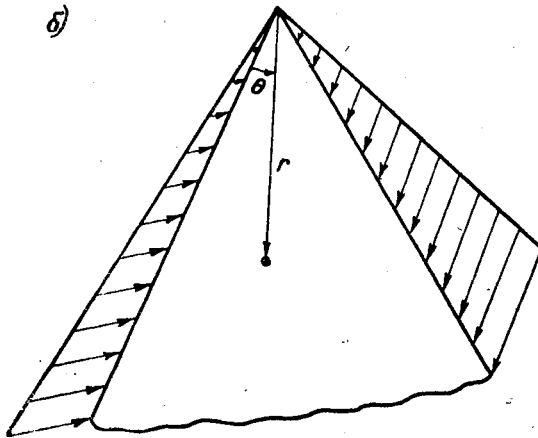
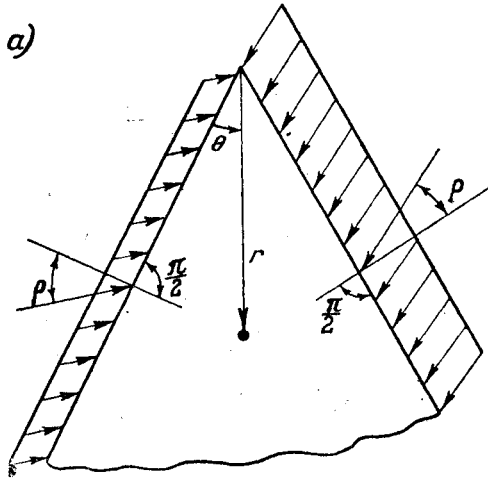


Рис. 5

откуда

$$\psi = \frac{2\tau_{r\theta}}{\sigma_r - \sigma_{\theta}} = \operatorname{ctg} \rho.$$

Компоненты напряжений в случае треугольной нагрузки (рис. 5, б) будут [5]:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= C_3 r (1 + 4 \operatorname{tg}^2 \rho) e^{\theta \sqrt{8 \operatorname{tg}^2 \rho - 1}}, \\ \sigma_\theta &= 3 C_3 r e^{\theta \sqrt{8 \operatorname{tg}^2 \rho - 1}}, \\ \tau_{r\theta} &= -C_3 r \sqrt{8 \operatorname{tg}^2 \rho - 1} e^{\theta \sqrt{8 \operatorname{tg}^2 \rho - 1}}, \end{aligned} \quad (4,7)$$

откуда

$$\psi = \frac{\sqrt{8 \operatorname{tg}^2 \rho - 1}}{1 - 2 \operatorname{tg}^2 \rho};$$

при $\rho = 30^\circ$ $\psi = 3,87$,
 „ $\rho = 40^\circ$ $\psi = -5,25$.

Переходим к полученному нами приближенному решению.

Пользуясь функцией напряжений (3,35), можно легко получить выражения компонентов напряжений для случая, когда нагрузка вдоль радиуса вектора не меняется:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= F(2 + \lambda_3^2) e^{\lambda_3 \theta}, \\ \sigma_\theta &= 2 F e^{\lambda_3 \theta}, \\ \tau_{r\theta} &= -\lambda_3 F e^{\lambda_3 \theta}, \end{aligned} \quad (4,8)$$

где
$$\lambda_3 = \frac{1 - \sqrt{1 - 8(b_1 - b_2)b_1}}{2b_1}, \quad (4,9)$$

и для случая изменения нагрузки вдоль радиуса-вектора по линейному закону:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= Fr(3 + \lambda_3^2) e^{\lambda_3 \theta}, \\ \sigma_\theta &= 6 Fr e^{\lambda_3 \theta}, \end{aligned} \quad (4,10)$$

где
$$\tau_{r\theta} = -2\lambda_3 Fr e^{\lambda_3 \theta},$$

$$\lambda_3 = \frac{1 - \sqrt{1 - 3(b_1 - 2b_2)b_1}}{b_1}. \quad (4,11)$$

Таблица 4

Результаты сравнительных расчетов для случая нагрузки, неизменной вдоль радиуса—вектора

ρ°	$\theta = 0$						$\theta = \frac{\pi}{2}$						Коэффициент при θ показателя степени e	
	точное решение			приближенное решение			точное решение			приближенное решение				
	σ_r	σ_θ	$\tau_{r\theta}$	σ_r	σ_θ	$\tau_{r\theta}$	σ_r	σ_θ	$\tau_{r\theta}$	σ_r	σ_θ	$\tau_{r\theta}$		
10	1,06	1,00	-0,18	1,05	1,00	-0,17	1,85	1,74	-0,31	1,78	1,68	-0,28	0,352	0,329
20	1,26	1,00	-0,36	1,24	1,00	-0,35	3,94	3,14	-1,14	3,73	3,00	-1,05	0,728	0,698
30	1,67	1,00	-0,58	1,61	1,00	-0,55	10,00	5,99	-3,45	9,18	5,70	-3,15	1,154	1,106
40	2,41	1,00	-0,84	2,46	1,00	-0,86	33,70	14,01	-11,73	36,30	14,73	-12,60	1,678	1,712
О ш и б к а в %														
10	—	—	—	1,0	0,0	5,5	—	—	—	4,3	3,4	9,7	—	6,5
20	—	—	—	1,6	0,0	2,8	—	—	—	5,3	4,5	7,9	—	4,1
30	—	—	—	3,6	0,0	5,2	—	—	—	8,2	4,8	8,7	—	4,1
40	—	—	—	2,1	0,0	2,4	—	—	—	7,7	5,1	7,4	—	2,0

Результаты сравнительных расчетов для случая нагрузки, изменяющейся пропорционально радиусу—вектору

ρ°	$\theta = 0$						$\theta = \frac{\pi}{2}$						Коэффициент при θ показателя степени e^{\cdot}	
	точное решение			приближенное решение			точное решение			приближенное решение				
	σ_r	σ_θ	$\tau_{r\theta}$	σ_r	σ_θ	$\tau_{r\theta}$	σ_r	σ_θ	$\tau_{r\theta}$	σ_r	σ_θ	$\tau_{r\theta}$	точное решение $\sqrt{8 \operatorname{tg}^2 \rho - 1}$	приближенное решение λ_3
30	0,78	1,00	-0,43	0,74	1,00	-0,40	5,91	7,60	-3,27	4,81	6,52	-2,59	1,291	1,194
40	1,27	1,00	-0,72	1,23	1,00	-0,70	37,35	29,37	-21,07	33,20	26,93	-18,82	2,152	2,097
30	—	—	—	5,1	0,0	7,0	—	—	—	18,6	14,2	20,5	—	7,5
40	—	—	—	3,1	0,0	2,8	—	—	—	11,1	8,3	10,6	—	2,6

Ошибка в %

Величины ошибок, получаемых в результате приближенности решения, приведены для случая равномерной и линейно изменяющейся вдоль радиуса—вектора нагрузки в таблицах 4 и 5 для ряда значений угла внутреннего трения грунта ρ . Эти ошибки оказываются наибольшими в рассматриваемых примерах для случая линейно изменяющейся вдоль радиуса—вектора нагрузки при $\rho = 30^\circ$. Поэтому целесообразно установить связь между ошибкой вследствие неточности определения угла внутреннего трения и нормального напряжения σ_θ , а также касательного $\tau_{r\theta}$:

$$\frac{\Delta \sigma_\theta}{\sigma_\theta} = \left| e^{\theta} \left(\sqrt{8 \operatorname{tg}^2(\rho + \Delta \rho) - 1} - \sqrt{8 \operatorname{tg}^2 \rho - 1} \right) - 1 \right|; \quad (4,12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \tau_{r\theta}}{\tau_{r\theta}} &= \\ &= \left| \sqrt{\frac{8 \operatorname{tg}^2(\rho + \Delta \rho) - 1}{8 \operatorname{tg}^2 \rho - 1}} e^{\theta} \left(\sqrt{8 \operatorname{tg}^2(\rho + \Delta \rho) - 1} - \sqrt{8 \operatorname{tg}^2 \rho - 1} \right) - 1 \right| \end{aligned} \quad (4,13)$$

Формулы (4,12) и (4,13) иллюстрируются табл. 4, из которой видно, что при $\theta = \frac{\pi}{2}$ анализируемая нами ошибка в зависимости от увеличения неточности в определении угла внутреннего трения очень сильно растет, достигая при $\rho = 40^\circ + 3^\circ$ почти 78% (табл. 6). Таким образом, можно прийти к выводу, что полученные в результате введенной при решении нашей задачи аппроксимации ошибки являются вполне допустимыми.

Следует остановиться в заключение настоящего параграфа на вопросе о линиях скольжения. Из теории предельно-напряженной сыпучей среды известно [8], что линиями скольжения называются линии, вдоль которых выполняется условие:

$$|\tau_n| - k = \sigma_n \operatorname{tg} \rho. \quad (4,14)$$

Для идеально сыпучей среды, в которой сцепление отсутствует, условие (4,14) упрощается:

$$|\tau_n| = \sigma_n \operatorname{tg} \rho. \quad (4,15)$$

В этом случае угол отклонения равнодействующей напряжений на площадке скольжения от нормали равен углу внутреннего трения. Линии скольжения являются

Таблица 6

ρ^0	$\Delta \rho^0$	Ошибка в % при $\theta = \frac{\pi}{2}$	
		σ_θ	$\tau_{r,\theta}$
30	-2	29,7	12,3
	-1	13,9	6,5
	+1	13,9	21,2
	+2	29,7	46,4
	+3	47,7	76,3
40	-3	52,2	33,1
	-2	32,3	21,1
	-1	15,0	10,1
	+1	16,2	21,2
	+2	35,2	46,9
	+3	56,8	77,7

огибающими площадок скольжения. Принципиальных трудностей вывод уравнения линий скольжения с учетом введенной аппроксимации не встречает. Однако, следует отметить, что погрешности при этом получаются часто весьма большими, даже такими, что не удастся использовать решение в отношении линий скольжения.

Для вывода дифференциального уравнения линий скольжения воспользуемся кругом Мора (рис. 6). Если обозначить угол между наибольшим главным напряжением σ_1 и положительным направлением оси x через ω , то угол между площадкой скольжения OA и осью x составит:

$$\omega_1 = \omega - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right), \quad (4,16)$$

поскольку площадки скольжения наклонены к направлению напряжения σ_1 под углом $\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}$ [8]. Из круга Мора (рис. 6) следует, что

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_x} \quad (4,17)$$

или обратно

$$\operatorname{ctg} \omega = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}. \quad (4,18)$$

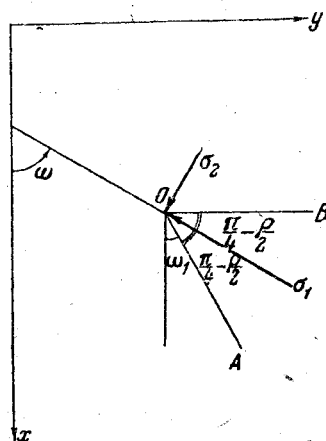
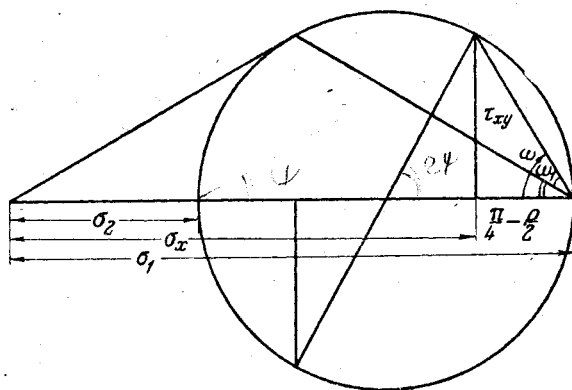


Рис. 6

В свою очередь,

$$\omega_1 = \operatorname{arccctg} \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} - \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2}. \quad (4,19)$$

Дифференциальное уравнение рассматриваемого семейства линии скольжения в силу вышеизложенного будет:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{y}} = \operatorname{ctg} \omega_1 = \operatorname{ctg} \left(\operatorname{arccctg} \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} - \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2} \right). \quad (4,20)$$

Производя элементарные преобразования, получим:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{y}} = \frac{\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) + 1}{\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) - \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}}. \quad (4,21)$$

Поскольку [9]

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}, \quad (4,22)$$

то, используя примененную аппроксимацию с учетом (2,24), можно получить:

$$\sigma_1 - \sigma_x = \frac{x_1 \alpha - 1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) + x_1 \tau_{xy}. \quad (4,23)$$

Преобразовывая (4,21) в соответствии с (4,23), имеем:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{y}} = \frac{2 \left[\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) + x_1 \right] \tau_{xy} + (x_1 \alpha - 1)(\sigma_x - \sigma_y)}{2 \left[\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) - x_1 \right] \tau_{xy} + (x_1 \alpha - 1)(\sigma_x - \sigma_y)}. \quad (4,24)$$

Таким образом, уравнение рассматриваемого семейства линий скольжения можно получить путем интегрирования (4,24) после подстановки в него (3,19) с учетом (1,3) и (3,1). Другое семейство линий скольжения составляет с рассмотренным углы $\left(\frac{\pi}{2} - \rho \right)$.

Аналогичным образом можно получить уравнение линий скольжения в полярных координатах. Если обозначить через ω угол между радиусом-вектором r и площадкой скольжения, то, пользуясь соотношениями из дифференциальной геометрии, будем иметь:

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{r} \frac{d\bar{r}}{d\bar{\theta}} = \operatorname{ctg} \omega_1 = \operatorname{ctg} \left(\operatorname{arccctg} \frac{\sigma_1 - \sigma_r}{\tau_{r\theta}} - \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2} \right). \quad (4,25)$$

Выражение (4,25) можно преобразовать к виду, аналогичному (4,24):

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \frac{2 \left[\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) + x_1 \right] \tau_{r\theta} + (x_1 \alpha - 1) (\sigma_r - \sigma_\theta)}{2 \left[\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) - x_1 \right] \tau_{r\theta} - (x_1 \alpha - 1) (\sigma_r - \sigma_\theta)} \quad (4,26)$$

Интегрируя (4,26) с учетом (3,28), (3,1) и (1,4), получим уравнение одного семейства линий скольжения. Второе семейство составляет с ним углы $\frac{\pi}{2} - \rho$.

Для идеально сыпучей среды вместо (3,19) следует воспользоваться (3,30) и вместо (3,28)—(3,31). Произведем оценку в отношении линий скольжения, используя рассмотренные выше примеры.

В первом рассмотренном примере линии скольжения, полученные в результате точного решения, совпадут с линиями скольжения, полученными в результате приближенного решения. Действительно, используя (4,21) и (4,5), имеем:

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right), \quad (4,27)$$

что совпадает с известным решением в отношении линий скольжения для зоны с простейшим напряженным состоянием [8]. Рассмотрим далее второй пример. Для нагрузки постоянной вдоль радиуса—вектора подставив (4,8) в (4,26), получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \operatorname{ctg} \alpha_{1,2}, \quad (4,28)$$

интегрируя которое, имеем:

$$r = C e^{\theta \operatorname{ctg} \alpha_{1,2}} \quad (4,29)$$

Аналогичное выражение получается и для точного решения. Отличие имеет место в значениях угла α , представляющего собой угол между радиусом—вектором и линией скольжения—в данном случае логарифмической спиралью (в точном решении одно семейство логарифмических спиралей выражается в радиусы). Для треугольной нагрузки в (4,26) следует подставить вместо (4,8)—

(4,10). Линии скольжения в этом случае также логарифмические спирали.

Численные значения углов α_1 и α_2 приведены в табл. 7, откуда видно, что расхождение в отношении линий скольжения представляется уже значительным. Вследствие этого применение использованной нами в настоящей работе аппроксимации для нахождения линий скольжения не всегда оказывается целесообразным из-за возможной значительной погрешности.

Таблица 7

Угол внутреннего трения ρ_0	Величины углов между радиусом—вектором и линиями скольжения							
	нагрузка вдоль радиуса—вектора не изменяется				нагрузка пропорциональна радиусу—вектору			
	точное решение		приближенное решение		точное решение		приближенное решение	
	α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_2
10	0	80°	7°10'	87°10'	—	—	—	—
20	0	70°	13°30'	83°30'	—	—	—	—
30	0	60°	19°10'	79°10'	22°20'	82°20'	34°50'	94°50'
40	0	50°	23°40'	73°40'	13°00'	63°00'	21°10'	71°10'

§ 5. О другой возможной линеаризации уравнения предельного равновесия

В § 2 было рассмотрено возможное в известных пределах представление функции $\sqrt{1 + \psi^2}$ с помощью другой, линейной относительно ψ , а именно $A\psi + B$. Это представление позволило линеаризовать уравнение предельного равновесия сыпучей среды и, далее, получить его решение, включающее функции, которые удовлетворяют уравнениям равновесия.

Однако такая линеаризация, конечно, далеко не является единственно возможной.

Мы рассмотрим ниже еще один способ линеаризации уравнения предельного равновесия, который может быть использован на практике, и получим общее решение линеаризованных уравнений.

Аналогично тому, как мы это делали раньше, рассмотрим сначала функцию $\sqrt{1 - \psi_1^2}$ с пределами изменения аргумента $\psi_{1\kappa} \leq \psi_1 \leq \psi_{1\kappa}$, где $\psi_{1\kappa} < 1$. Эту функцию мы заменим другой функцией $M\psi_1 + N$, уже линейной относительно ψ_1 .

Относительное отклонение δ равно отношению разности аппроксимируемой и аппроксимирующей функций к первой, т. е.:

$$\delta = \frac{\sqrt{1 - \psi_1^2} - (M\psi_1 + N)}{\sqrt{1 - \psi_1^2}} = 1 - \frac{M\psi_1 + N}{\sqrt{1 - \psi_1^2}}. \quad (5,1)$$

Нетрудно увидеть, что функция $F_0 = \sqrt{1 - \psi_1^2}$ изображается окружностью единичного радиуса. Рассмотрим еще две функции:

$$F_1 = (1 + |\delta|) \sqrt{1 - \psi_1^2}; \quad (5,2)$$

$$F_2 = (1 - |\delta|) \sqrt{1 - \psi_1^2}. \quad (5,3)$$

Эти функции представляются эллипсами, в чем нетрудно убедиться, преобразовав их к виду:

$$\left(\frac{F_{1,2}}{1 \pm |\delta|} \right)^2 + \left(\frac{\psi_1}{1} \right)^2 = 1. \quad (5,4)$$

Здесь первому индексу у $F(\psi_1)$ соответствует верхний знак и второму — нижний. Все эти три кривые изображены на рис. 7. В зависимости от того, какой величиной относительной погрешности δ зададимся, мы получим то или иное отклонение эллипсов от основной окружности.

Поскольку основная функция F_0 заменяется линейной, то нам потребуется записать для дальнейшего уравнения касательной к внутреннему эллипсу $F_2(\psi_1)$, пользуясь известным из дифференциальной геометрии уравнением касательной к эллипсу $F_2(\psi_1)$ в точке $\bar{\psi}_1$.

Это необходимо потому, что отрезок аппроксимирующей прямой должен лежать между этими двумя эллипсами, как показано на рис. 7. Оттуда видно, что этот отрезок, поскольку мы стремимся к тому, чтобы длина его была наибольшей, должен касаться внутреннего эллипса и концы его будут одновременно являться точками внешнего эллипса.

Производная функции F_2 равна:

$$\frac{dF_2}{d\psi_1} = - \frac{(1-|\delta|)\psi_1}{\sqrt{1-\psi_1^2}}, \quad (5,5)$$

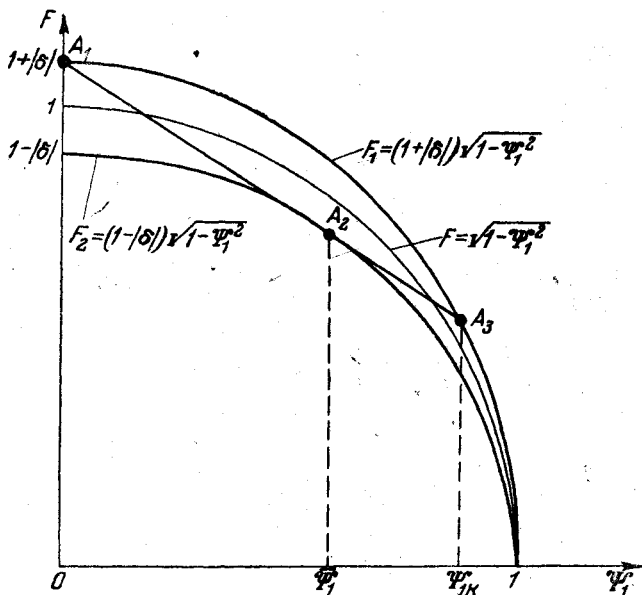


Рис. 7

и уравнение касательной

$$\bar{F}_0 - \bar{F}_2 = \left(\frac{dF_2}{d\psi_1} \right)_{\psi_1 = \bar{\psi}_1} (\psi_1 - \bar{\psi}_1), \quad (5,6)$$

где \bar{F}_2 и $\bar{\psi}_1$ — координаты точки касания, а \bar{F}_0 и ψ_1 — координаты самой касательной.

Подставляя в (5,6) — (5,5) и (5,3), получим при $\psi_1 = \bar{\psi}_1$ после небольших преобразований уравнение касательной в точке с координатами $(\bar{\psi}_1, \bar{F}_2)$:

$$\begin{aligned} \bar{F}_0 &= - \frac{(1-|\delta|)(\psi_1 - \bar{\psi}_1)\bar{\psi}_1}{\sqrt{1-\bar{\psi}_1^2}} + (1-|\delta|)\sqrt{1-\bar{\psi}_1^2} = \\ &= \frac{1-|\delta|}{\sqrt{1-\bar{\psi}_1^2}} - \frac{1-|\delta|}{\sqrt{1-\bar{\psi}_1^2}} \bar{\psi}_1 \psi_1 = N + M \psi_1. \end{aligned} \quad (5,7)$$

Таким образом, у нас есть уравнение касательной (5,7), которая и является по существу аппроксимирующей прямой. Теперь можно перейти к самой аппроксимации.

Участок, который мы рассмотрим, начинается непосредственно от точки $\psi_1 = 0$. При этом значении $\psi_1 = 0$ функция \bar{F}_0 должна быть равна $F_0(0)$, то-есть:

$$\bar{F}_0(0) = F_1(0)$$

или

$$\frac{1 - |\delta|}{\sqrt{1 - \bar{\psi}_1^2}} = 1 + |\delta|. \quad (5,8)$$

Решая (5,8) относительно $\bar{\psi}_1$, будем иметь:

$$\bar{\psi}_1 = \frac{2\sqrt{|\delta|}}{1 + |\delta|}. \quad (5,9)$$

Теперь, пользуясь (5,9) и подставляя (5,9) в (5,7), мы получим уравнение аппроксимирующей прямой на рассматриваемом участке. Нас будет интересовать значение ψ_1 , при котором оканчивается отрезок прямой. Для определения этого значения следует воспользоваться тем условием, что эта точка одинаково принадлежит и к аппроксимирующей прямой и к наружному эллипсу и, следовательно,

$$\bar{F}_0(\psi_{1\kappa}) = F_1(\psi_{1\kappa})$$

или

$$\frac{1 - |\delta|}{\sqrt{1 - \frac{4|\delta|}{(1 + |\delta|)^2}}} \left(1 - \frac{2\sqrt{|\delta|}}{1 + |\delta|} \psi_{1\kappa} \right) = (1 + |\delta|) \sqrt{1 - \psi_{1\kappa}^2}. \quad (5,10)$$

Разрешая (5,10) относительно $\psi_{1\kappa}$, получим:

$$\psi_{1\kappa} = \frac{4(1 + |\delta|)\sqrt{|\delta|}}{1 + 6|\delta| + \delta^2}. \quad (5,11)$$

В таблице 8 приведены значения $\psi_{1\kappa}$, соответствующие различным погрешностям $|\delta|$ в %, которые вычислены по формуле (5,11).

Таблица 8

Относительная погрешность $ \delta , \%$	Начальное значение ψ_1 (точка A_1 на рис. 7)	Значение $\psi_1 = \bar{\psi}_1$ в точке касания с нижним эллипсом (точка A_2 на рис. 7)	Конечное значение $\psi_1 = \psi_{1\kappa}$ (точка A_3 на рис. 7)	M	N
1	0	0,198	0,381	-0,2000	1,0100
2	0	0,277	0,515	-0,2825	1,0200
3	0	0,336	0,605	-0,3461	1,0300
4	0	0,385	0,670	-0,4004	1,0400
4,70	0	0,415	0,707	-0,4345	1,0470
5	0	0,425	0,723	-0,4462	1,0500
6	0	0,462	0,765	-0,4897	1,0600
7	0	0,495	0,793	-0,5296	1,0700
8	0	0,524	0,826	-0,5659	1,0800
9	0	0,550	0,845	-0,5995	1,0900
10	0	0,575	0,869	-0,6325	1,1000
15	0	0,675	0,928	-0,7762	1,1500
20	0	0,745	0,959	-0,8940	1,2000
25	0	0,800	0,975	-1,0000	1,2500
30	0	0,845	0,985	-1,0985	1,3000

Из этой таблицы следует, например, что погрешности в—4,7%, которая вполне допустима в практических расчетах, соответствует значение начального участка:

$$0 \leq \psi_1 \leq 0,707 \approx \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Таким образом, мы можем выполнить необходимую нам аппроксимацию функции:

$$F_0 = \sqrt{1 - \psi_1^2}$$

с помощью линейной функции

$$M\psi_1 + N,$$

т. е. допустить, что

$$\sqrt{1 - \psi_1^2} \approx M\psi_1 + N \quad (5,12)$$

при изменении ψ_1 в пределах от 0 до $\frac{\sqrt{2}}{2}$ с погрешностью в 4,7%. Значения M и N следующие (см. табл. 8):

$$M = -0,4345,$$

$$N = 1,0470. \quad (5,13)$$

Если ψ_1 будет изменяться в пределах $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \psi_1 \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, то зависимость (5,12) с учетом (5,13) запишется так:

$$\sqrt{1 - \psi_1^2} \approx 1,0470 - 0,4345 x_1 \psi_1, \quad (5,14)$$

где x_1 имеет знак ψ_1 и численно равно единице, т. е. если ψ_1 отрицательно, то $x_1 = -1$, если положительно, то $x_1 = +1$.

Займемся теперь непосредственно уравнением предельного равновесия (1,6):

$$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = (\sigma_x + \sigma_y + 2\kappa \operatorname{ctg} \rho) \sin \rho. \quad (1,6)$$

В это уравнение для удобства выкладок введем значения приведенных напряжений [8]:

$$\bar{\sigma}_x = \sigma_x + \kappa \operatorname{ctg} \rho;$$

$$\bar{\sigma}_y = \sigma_y + \kappa \operatorname{ctg} \rho;$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \tau_{xy}. \quad (5,15)$$

Уравнение (1,6), после подстановки в него (5,15), будет иметь вид:

$$\sqrt{(\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_y)^2 + 4\bar{\tau}_{xy}^2} = (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y) \sin \rho. \quad (5,16)$$

Полагая в дальнейшем $\bar{\sigma}_x < \bar{\sigma}_y$, разрешим уравнение (5,16) относительно $\bar{\sigma}_x$, т. е. меньшего напряжения:

$$\bar{\sigma}_x = \left[\frac{1 + \sin^2 \rho}{\cos^2 \rho} - \frac{2 \sin \rho}{\cos^2 \rho} \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{\tau}_{xy}}{\bar{\sigma}_y \operatorname{tg} \rho} \right)^2} \right] \bar{\sigma}_y. \quad (5,17)$$

В формулу (5,17) входит радикал $\sqrt{1 - \left(\frac{\overline{\tau_{xy}}}{\overline{\sigma}_y \operatorname{tg} \rho}\right)^2}$.

Максимальное значение, которое может принимать дробь $\frac{\overline{\tau_{xy}}}{\overline{\sigma}_x \operatorname{tg} \rho}$ при условии $\overline{\sigma}_y > \overline{\sigma}_x$, это $\cos \rho$. В этом нетрудно убедиться, если исходить из круга Мора (рис. 8). Действи-

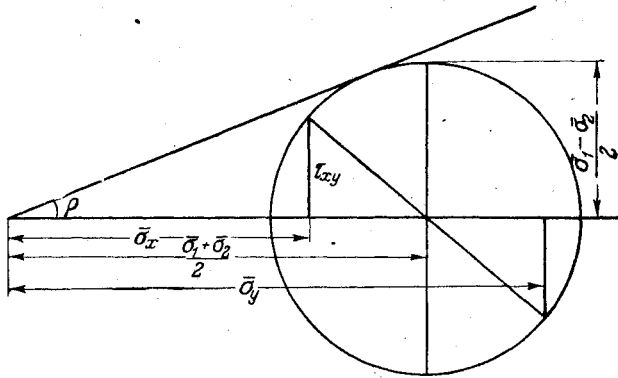


Рис. 8

тельно, максимальному значению этого отношения соответствует случай $\overline{\sigma}_y = \overline{\sigma}_x$, при котором $\overline{\tau_{xy}}$ достигает максимума. Но как следует из того же рисунка

$$\left(\frac{\overline{\tau_{xy}}}{\overline{\sigma}_y}\right)_{\text{макс}} = \frac{\overline{\sigma}_1 - \overline{\sigma}_2}{\overline{\sigma}_1 + \overline{\sigma}_2} = \sin \rho . \quad (5,18)$$

Это, конечно, справедливо только при условии $\overline{\sigma}_y \geq \overline{\sigma}_x$. Таким образом, максимальное значение дроби

$$\left(\frac{\overline{\tau_{xy}}}{\overline{\sigma}_y \operatorname{tg} \rho}\right)_{\text{макс}} = \frac{\sin \rho}{\operatorname{tg} \rho} = \cos \rho \quad (5,19)$$

и пределы изменения этого отношения

$$-\cos \rho \leq \frac{\overline{\tau_{xy}}}{\overline{\sigma}_y \operatorname{tg} \rho} \leq \cos \rho ; \quad (5,20)$$

$$\overline{\sigma}_y \geq \overline{\sigma}_x .$$

Для того чтобы воспользоваться той аппроксимацией, о которой говорилось выше, целесообразно знать ошибку, с которой мы будем проводить решение, если нужно охватить весь интервал изменения $\left| \frac{\overline{\tau_{xy}}}{\sigma_y \operatorname{tg} \rho} \right|$ от нуля до $\cos \rho$.

Эти данные сведены в табл. 9.

Таблица 9

ρ°	Относительная погрешность решения $ \delta $ в % для случая изменения
	$\left \frac{\overline{\tau_{xy}}}{\sigma_y \operatorname{tg} \rho} \right $ от нуля до $\cos \rho$
10	30,0
20	16,9
30	10,0
40	6,0

Из табл. 9 видно, что чем больше угол внутреннего трения ρ , тем точнее можно получить решение с помощью примененной аппроксимации. В том случае, если по условиям задачи необходимо охватить интервал изменения $\frac{\overline{\tau_{xy}}}{\sigma_y \operatorname{tg} \rho}$ меньший, чем от $\cos \rho$ до $-\cos \rho$, то можно применить линеаризующую аппроксимацию с заданной незначительной погрешностью. Возможно, что по тем же условиям задачи придется иметь дело с изменением величины $\frac{\overline{\tau_{xy}}}{\sigma_y \operatorname{tg} \rho}$ в пределах от $\psi_{1н}$ до $\psi_{1к}$, где $\psi_{1н} > 0$. Тогда точность решения можно повысить, приняв соответствующие значения M и N .

Дальнейшие выкладки связаны с применением аппроксимирующей зависимости. Так как мы приняли, что

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\overline{\tau_{xy}}}{\sigma_y \operatorname{tg} \rho} \right)^2} \approx M \frac{\overline{\tau_{xy}}^2}{\sigma_y \operatorname{tg} \rho} + N, \quad (5,21)$$

то, подставляя (5,21) в (5,17), получим:

$$\bar{\sigma}_x = \left(\frac{1 + \sin^2 \rho}{\cos^2 \rho} - 2N \frac{\sin \rho}{\cos^2 \rho} \right) \bar{\sigma}_y - 2M \frac{\bar{\tau}_{xy}}{\cos \rho}. \quad (5,22)$$

Это и есть преобразованное уравнение предельного равновесия, линейное относительно компонент напряжений.

Решение этого уравнения будет дано в следующем параграфе.

Можно привести еще одно преобразование уравнения предельного равновесия (5,16). Разрешим (5,16) относительно $\bar{\tau}_{xy}$, после чего получим:

$$\bar{\tau}_{xy} = \pm \frac{\sin \rho}{2} (\bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_x) \sqrt{1 - \left[\frac{\bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}_x}{(\bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_x) \sin \rho} \right]^2}. \quad (5,23)$$

Радикал в выражении (5,23) можно аппроксимировать рассмотренной в настоящем параграфе линейной функцией. Однако в данном случае пределы изменения отношения $\frac{\bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}_x}{(\bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_x) \sin \rho}$ будут равны ∓ 1 . Следовательно, такая аппроксимация будет практически удовлетворительна лишь при значениях:

$$\left| \frac{\bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}_x}{(\bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_x) \sin \rho} \right| < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Как видно из зависимости (5,23), с уменьшением рассматриваемого отношения $\frac{\bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}_x}{(\bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_x) \sin \rho}$ увеличивается $\bar{\tau}_{xy}$, следовательно, линеаризованное уравнение (5,23) хорошо для случаев, когда $\bar{\tau}_{xy}$ велико, в то время как линеаризованное уравнение (5,17) хорошо для случаев, когда $\bar{\tau}_{xy}$ мало.

Линеаризованное уравнение (5,23) будет выглядеть следующим образом:

$$\bar{\tau}_{xy} = \pm \frac{1}{2} [M(\bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}_x) + N(\bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_x) \sin \rho]. \quad (5,24)$$

Выше мы занимались преобразованиями уравнения предельного равновесия, записанного относительно компонентов напряжений в прямоугольной системе координат. Те же уравнения мы получим, если нами будет выбрана система полярных координат. Уравнения в полярных координатах мы получим, если в (5,22) и в (5,24) заменим σ_x на $\bar{\sigma}_r$, σ_y на $\bar{\sigma}_\theta$ и τ_{xy} на $\bar{\tau}_{r\theta}$.

Решение линеаризованного уравнения по существу ничем не отличается от решения уравнения, которое мы получили в § 2, так как во всех этих уравнениях компоненты напряжений связаны между собой линейным образом. Отличие имеет место лишь в величинах коэффициентов.

§ 6. Интеграл уравнения предельного равновесия сыпучей среды

В § 3 мы уже приводили уравнение предельного равновесия, содержащее одну неизвестную функцию напряжений φ , а также получили его решение. В настоящем параграфе приведем еще раз это уравнение и дадим его решение для всех приемов аппроксимации, примененных в настоящей работе.

Воспользовавшись зависимостями (1,3) и (5,15), можно записать следующие выражения для компонентов напряжений, положив для удобства дальнейших выкладок $s = 0$:

$$\bar{\sigma}_x = \sigma_x + \kappa \operatorname{ctg} \rho = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \gamma x + \kappa \operatorname{ctg} \rho; \quad (6,1)$$

$$\bar{\sigma}_y = \sigma_y + \kappa \operatorname{ctg} \rho = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \xi_0 \gamma x + \kappa \operatorname{ctg} \rho;$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

Для большей наглядности решения мы не вводим обозначений (2,20), хотя они могут оказаться удобными для вычислений. Этот переход к новым координатам может быть произведен и позже, после получения решения. Выпишем еще раз линеаризованное уравнение предельного равновесия (2,25) с учетом сказанного выше:

$$x_1 \alpha (\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_y) + 2x_1 \beta \bar{\tau}_{xy} = (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y) \sin \rho \quad (6,2)$$

или

$$\bar{\sigma}_x(x_1 \alpha - \sin \rho) - \bar{\sigma}_y(x_1 \alpha + \sin \rho) + 2x_1 \beta \bar{\tau}_{xy} = 0. \quad (6,3)$$

Из уравнения (5,22) получим:

$$\bar{\sigma}_x \cos^2 \rho - (1 + \sin^2 \rho - 2N \sin \rho) \bar{\sigma}_y - 2M \bar{\tau}_{xy} \cos \rho = 0 \quad (6,4)$$

и из уравнения (5,24)

$$\bar{\sigma}_x(M - N \sin \rho) - \bar{\sigma}_y(M + N \sin \rho) \mp 2 \bar{\tau}_{xy} = 0. \quad (6,5)$$

Таким образом, мы видим, что уравнения (6,3), (6,4) и (6,5) имеют различие лишь в коэффициентах, связывая линейным образом все три напряжения.

Разделив все члены этих уравнений на коэффициент при $\bar{\sigma}_x$, получим вместо (6,3):

$$\bar{\sigma}_x - \frac{x_1 \alpha + \sin \rho}{x_1 \alpha - \sin \rho} \bar{\sigma}_y + \frac{2x_1 \beta}{x_1 \alpha - \sin \rho} \bar{\tau}_{xy} = 0; \quad (6,6)$$

вместо (6,4):

$$\bar{\sigma}_x - \frac{1 + \sin^2 \rho - 2N \sin \rho}{\cos^2 \rho} \bar{\sigma}_y - \frac{2M}{\cos \rho} \bar{\tau}_{xy} = 0 \quad (6,7)$$

и вместо (6,5):

$$\bar{\sigma}_x - \frac{M + N \sin \rho}{M - N \sin \rho} \bar{\sigma}_y \mp \frac{2}{M - N \sin \rho} \bar{\tau}_{xy} = 0. \quad (6,8)$$

Если записать в общем виде все эти три уравнения, то будем иметь:

$$\bar{\sigma}_x - A_1 \bar{\sigma}_y + \bar{A}_2 \bar{\tau}_{xy} = 0. \quad (6,9)$$

Вернемся теперь к исходному уравнению предельного равновесия (5, 16). После возведения обеих частей этого уравнения в квадрат и небольших преобразований получим:

$$\bar{\sigma}_x^2 \cos^2 \rho - 2 \bar{\sigma}_x \bar{\sigma}_y (1 + \sin^2 \rho) + \bar{\sigma}_y^2 \cos^2 \rho + 4 \bar{\tau}_{xy}^2 = 0. \quad (6,10)$$

Продолжая преобразования, запишем (6,10) следующим образом, разделив все члены этого уравнения на $\bar{\sigma}_x \cos^2 \rho$:

$$\bar{\sigma}_x - \left(2 \frac{1 + \sin^2 \rho}{\cos^2 \rho} \right) \bar{\sigma}_y + \left(\frac{\bar{\sigma}_y}{\bar{\sigma}_x} \right) \bar{\sigma}_y + \left(\frac{4 \bar{\tau}_{xy}}{\cos^2 \rho \bar{\sigma}_x} \right) \bar{\tau}_{xy} = 0. \quad (6,11)$$

В скобку последнего члена выражения (6, 11) введем $\bar{\tau}_{xy}$ из (5,23), которое получено в результате разрешения относительно $\bar{\tau}_{xy}$ исходного уравнения (5, 16).

После этого, а также соответствующей группировки членов в (6, 11) будем иметь следующее:

$$\bar{\sigma}_x + \left(\frac{\bar{\sigma}_y}{\bar{\sigma}_x} - 2 \frac{1 + \sin^2 \rho}{\cos^2 \rho} \right) \bar{\sigma}_y +$$

$$+ \left[\frac{\pm 2}{\cos^2 \rho} \sqrt{\left(\frac{\bar{\sigma}_y}{\bar{\sigma}_x} + 1 \right)^2 \sin^2 \rho - \left(\frac{\bar{\sigma}_y}{\bar{\sigma}_x} - 1 \right)^2} \right] \bar{\tau}_{xy} = 0. \quad (6,12)$$

Сравним теперь (6,12) и (6,9). Согласно всему изложенному A_1 и A_2 являются в известных пределах постоянными величинами. Если же не вводить аппроксимацию, линеаризующую исходное уравнение предельного равновесия, эти коэффициенты вовсе не будут постоянными, а будут переменными и содержащими искомую функцию напряжений $\varphi(x, y)$. Это следует из (6, 9) и (6, 12). Действительно из сопоставления (6, 12) и (6, 9) видно, что коэффициенту A_1 в (6, 9) соответствует выражение в круглых скобках при $\bar{\sigma}_y$ в (6, 12) и коэффициенту A_2 в (6, 9) соответствует выражение в круглых скобках при $\bar{\tau}_{xy}$ в (6, 12). Таким образом, мы могли бы условно приравнять:

$$2 \frac{1 + \sin^2 \rho}{\cos^2 \rho} - \frac{\bar{\sigma}_y}{\bar{\sigma}_x} = A_1; \quad (6,13)$$

$$\pm \frac{2}{\cos^2 \rho} \sqrt{\left(\frac{\bar{\sigma}_y}{\bar{\sigma}_x} + 1 \right)^2 \sin^2 \rho - \left(\frac{\bar{\sigma}_y}{\bar{\sigma}_x} - 1 \right)^2} = A_2. \quad (6,14)$$

Отсюда видно, что производя линеаризацию уравнения предельного равновесия, мы заменяем, вообще говоря, переменные коэффициенты A_1 и A_2 , являющиеся функциями отношения $\frac{\bar{\sigma}_y}{\bar{\sigma}_x}$ и, следовательно, зависящие от x, y некоторыми постоянными значениями, что может быть допустимым в известных пределах, о которых говорилось ранее.

Подставляя в (6,9) значения компонент напряжений по (6,1)

$$-A_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2 \frac{A_2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = (A_1 \xi_0 - 1) \gamma x + (A_1 - 1) \kappa \operatorname{ctg} \rho, \quad (6,15)$$

получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных с постоянными коэффициентами, интегрирование которого не представляет труда [4]. Следует отметить также, что это уравнение принадлежит к гиперболическому типу, так как всегда

$$4 A_1 + A_2^2 > 0. \quad (6,16)$$

Действительно, если мы возьмем (6,6), то должны иметь по (6,16):

$$\alpha^2 + \beta^2 > \sin^2 \rho,$$

что всегда выполняется, если принять во внимание табл. 2. Если взять (6,7), то получим:

$$\frac{1 + \sin^2 \rho + M^2}{\sin \rho} > 2N. \quad (6,17)$$

Воспользовавшись (5,13), получим, что:

$$1,1888 + \sin^2 \rho > 2,0940 \sin \rho, \quad (6,18)$$

что всегда выполняется.

Аналогично и для (6,8) имеем:

$$\frac{M^2 + 1}{N^2} > \sin \rho \quad (6,19)$$

или с учетом (5,13)

$$1,083 > \sin^2 \rho, \quad (6,20)$$

что всегда выполняется. Уравнение гиперболического типа, как известно [4], имеет два семейства действительных характеристик.

Общее решение этого уравнения легко может быть получено либо с помощью приема, примененного в § 3, либо с помощью метода характеристик.

Уравнение характеристик будет:

$$\begin{aligned}
 & -A dy^2 + A_2 dx dy + dx^2 = \\
 & = \left(dy - \frac{A_2 + \sqrt{A_2^2 + 4A_1}}{2A_1} dx \right) \left(dy - \frac{A_2 - \sqrt{A_2^2 + 4A_1}}{2A_1} dx \right) = 0
 \end{aligned} \tag{6,21}$$

и уравнения характеристик:

$$y - \frac{A_2 + \sqrt{A_2^2 + 4A_1}}{2A_1} x = \text{const} ; \tag{6,22}$$

$$y - \frac{A_2 - \sqrt{A_2^2 + 4A_1}}{2A_1} x = \text{const} . \tag{6,23}$$

Следовательно, общее решение имеет вид [4]:

$$\begin{aligned}
 \varphi = & \lambda_1 \left(y - \frac{A_2 - \sqrt{A_2^2 + 4A_1}}{2A_1} x \right) + \\
 & + \lambda_2 \left(y - \frac{A_2 + \sqrt{A_2^2 + 4A_1}}{2A_1} x \right) .
 \end{aligned} \tag{6,24}$$

Если мы сопоставим это решение с полученным в § 3 (3,23), то увидим, что решение (6,24) является более общим. В него входят две произвольные функции λ_1 и λ_2 , которые выбираются таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям. Частное решение остается тем же, что и было получено ранее, то-есть ищется в виде:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 = & \frac{d_{20}}{2} x^2 + d_{11} xy + \frac{d_{02}}{2} y^2 + \frac{d_{30}}{6} x^3 + \frac{d_{21}}{2} x^2 y + \\
 & + \frac{d_{12}}{2} xy^2 + \frac{d_{03}}{6} y^3 .
 \end{aligned} \tag{6,25}$$

Подставляя (6,25) в (6,15), получим три уравнения, аналогичные (3,6)–(3,9), из которых следует, что только 4 коэффициента из 7 являются независимыми (d_{02} , d_{20} , d_{03} , d_{30}), а остальные 3 выражаются через них.

Эти независимые коэффициенты определяются исходя из граничных условий рассматриваемой задачи. Коэффициенты d_{11} , d_{21} и d_{12} выражаются через независимые коэффициенты следующим образом:

$$d_{11} = \frac{1}{A_2} [d_{02} - A_1 d_{20} - (A_1 - 1) \kappa \operatorname{ctg} \rho];$$

$$d_{21} = \frac{1}{A_1 + A_2^2} [d_{03} - A_1 A_2 d_{30} - (A_1 \xi_0 - 1) \gamma A_2]; \quad (6,26)$$

$$d_{12} = \frac{1}{A_1 + A_2^2} [A_2 d_{03} + A_1^2 d_{30} + (A_1 \xi_0 - 1) \gamma A_1].$$

Это решение уже было получено нами ранее (3,34), где коэффициенты d_{ik} обозначены через a_{ik} .

Решение в полярных координатах можно получить тем же способом, что и в § 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Березанцев В. Г., Осесимметричная задача теории предельного равновесия сыпучей среды, Гостехиздат, 1953.
 2. Говядинов А. И., Аналитический метод в статике сыпучих тел, Известия АН СССР, ОТН, № 3, 1955.
 3. Голушкевич С. С., Плоская задача теории предельного равновесия сыпучей среды, Гостехиздат, 1948.
 4. Кошляков Н. С., Основные дифференциальные уравнения математической физики, ОНТИ, 1936.
 5. Малышев М. В., Об идеально-сыпучем клине, находящемся в предельно-напряженном состоянии. Доклады Академии наук СССР, т. 75, вып. 6, 1950.
 6. Малышев М. В., Теоретические и экспериментальные исследования несущей способности песчаного основания, изд. „ВОДГЕО“, 1953.
 7. Малявинский Н. А., Два приближенных метода решения плоской задачи теории пластичности и предельного равновесия сыпучей среды. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, Томск, 1956.
 8. Соколовский В. В., Статика сыпучей среды, изд. АН СССР, 1942 и Гостехиздат, 1954 (изд. 2-е).
 9. Тимошенко С. П., Теория упругости, ОНТИ, 1937.
 10. Филоненко-Бородич М. М., Теория упругости, Гостехиздат, 1947.
 11. Цытович Н. А., Механика грунтов, Госстройиздат, 1951.
-

О Г Л А В Л Е Н И Е

	Стр.
Предисловие	3
§ 1. Исходные уравнения	5
§ 2. Линеаризация уравнения предельного равновесия	8
§ 3. Решение линеаризованного уравнения предельного равновесия сыпучей среды	15
§ 4. Оценка полученного решения	22
§ 5. О другой возможной линеаризации уравнения предельного равновесия	34
§ 6. Интеграл уравнения предельного равновесия сыпучей среды	43
Литература	49

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
22	Формула (3,34)	$\varphi^0 = \sum_{i=k}^n C_i e^{\lambda_i(y+\lambda_2 x)} + \dots$	$\varphi^0 = \sum_{i=k}^n C_i e^{\lambda_i(y+\lambda_2 x)} + \dots$