

# ОСНОВАНИЯ, ФУНДАМЕНТЫ и МЕХАНИКА ГРУНТОВ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
и ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ  
ЖУРНАЛ  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
КОМИТЕТА  
СОВЕТА МИНИСТРОВ СССР  
ПО ДЕЛАМ  
СТРОИТЕЛЬСТВА

6  
1971

ИЗДАЕТСЯ  
С 1959 г.

## МЕХАНИКА ГРУНТОВ

УДК 624.131.53+681.2.087.5

М. В. МАЛЫШЕВ

### О линиях скольжения и траекториях перемещения частиц в сыпучей среде

В этом году исполнилось 80 лет с момента публикации специальной лекции автора одного из первых отечественных курсов оснований и фундаментов [1] профессора Института инженеров путей сообщения (ныне ЛИИЖТ) Валериана Ивановича Курдюмова «О сопротивлении естественных оснований» [2], в которой он впервые предложил использовать фотографию для определения границы зоны и характера смещения грунта при выпирании его из-под модели фундамента. Он писал: «Если фотографировать в течение нескольких секунд песок, заключенный в сосуде со стеклянной стенкой и подвергаемый раздавливанию стержнем ..., то те песчинки, которые при этом остаются в покое, должны выйти на фотографии вполне резко, отчетливо, тогда как изображения песчинок, двигавшихся при фотографировании, должны оказаться не резкими, размазанными. Вся совокупность размазанных изображений должна определить собою фигуру призмы выпирания, а граница между изображениями, размазанными и резкими, — кривую скольжения призмы выпирания» [2].

Предложенный Курдюмовым метод, названный методом фотофиксации, оказался весьма эффективным и им впоследствии пользовались многие экспериментаторы как у нас, так и за рубежом. Этот метод в дальнейшем был применен также для фиксирования очертания упругого ядра под штампом, для чего фотоаппарат жестко скреплялся со штампом и перемещался с ним в ходе опыта [3]. При этом зерна песка в ядре получались на негативе четкими, а в остальной зоне размазанными.

Курдюмов под линиями скольжения понимал «геометрическое место плоскостей скольжения эллипсов напряжений в различных точках сыпучего тела» [2]. Развившаяся в наше время, особенно благодаря трудам В. В. Соколовского, В. Г. Березанцева и др., теория предельного равновесия сыпучей среды также использует термин «линии скольжения», причем они определяются как линии, касательные к которым совпадают с площадками скольжения [4]. Вдоль последних выполняется условие предельного состояния Куленя

$$\tau_n = \sigma_n \operatorname{tg} \rho + k, \quad (1)$$

где  $\tau_n$  и  $\sigma_n$  — соответственно касательное и нормальное напряжения, действующие на рассматриваемой площадке сдвига с нормалью  $n$ ;  $\rho$  — угол внутреннего трения;  $k$  — удельное

сцепление. Линии скольжения образуют два изогональных семейства. В теории предельного равновесия понятие линий скольжения чисто статическое, хотя совершенно логично, что относительное смещение наблюдалось бы именно вдоль площадок, где касательное напряжение достигает величины, при которой выполняется условие (1), поскольку по другим направлениям

$$\tau_n < \sigma_n \operatorname{tg} \rho + k. \quad (2)$$



В. И. Курдюмов (1853—1904 гг.)

Так как имеется два семейства линий скольжения, то Г. А. Гениев считает [5], что видимые смещения происходят вдоль одного из них, которое он назвал активным. Последнее приводит к тому, что «активные» площадки скольжения должны совпадать с направлением максимальных скоростей деформаций сдвига. Для того чтобы связать напряжения и скорости деформаций, была предложена гипотеза о пластическом потенциале [6, 7], из которой вытекает коаксиальность главных осей напряжений и скоростей деформаций. Р. Шилд принял [8] в качестве пластического потенциала функцию, совпадающую с уравнением прочности Мора, и решил задачу о выпирании грунта из-под фундамента. Согласно его решению несущая способность основания осталась той же, что и у Прандтля [4], и векторы скоростей в зоне максимально напряженного состояния не совпадают с линиями скольжения, а отклонены от них на угол  $\rho$  (рис. 1). Последнее заставило сомневаться в правдоподобности решения Шилда [9], обсуждавшегося впоследствии Ю. И. Соловьевым [10].

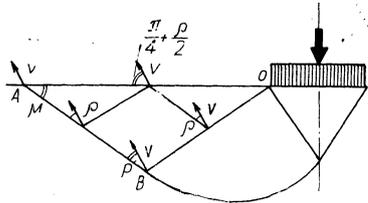


Рис. 1. Схема выпирания по Прандтлю — Шилду,  $\rho = \pi/4 - \rho/2$

В связи со сказанным разберем вопрос о том, что получается на фото при использовании метода фотофиксации или аналогичных способов с применением запечатленных стекол, парафинированного экрана и других.

В дальнейшем будем исходить из положения, что метод фотофиксации позволяет видеть не линии максимальных скоростей деформаций, а траектории перемещений частиц грунта.

Обозначим через  $u_x, u_y$  проекции на оси  $x, y$  полного перемещения точки  $M_1$  (рис. 2, а) области  $\Omega$  за время  $t$ , а через  $v_x, v_y$  соответствующие скорости. Поскольку рассматривается процесс плоского пластического течения, то последние предполагаются либо постоянными, либо пропорциональными временной функции, например, скорости смещения части границы области  $\Omega$ . За время  $t$  точка  $M_1$  переместится в  $M'_1, M_2$  в  $M'_2$  и т. д. На фотографии мы увидим кривую  $S$ , а векторы полных перемещений будут направлены по касательной к ней. Следовательно, для кривой  $S$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{u_y}{u_x} = \frac{v_y}{v_x}, \quad (3)$$

откуда

$$y = \int \frac{\bar{v}_y}{v_x} dx. \quad (4)$$

Уравнение линий скольжения, которое мы имеем из условия коаксиальности полей напряжений и деформаций, выполня-

ющегося при наличии пластического потенциала [7], выводится следующим образом. Обозначим

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y}{2\dot{\gamma}_{xy}} = \frac{\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}}{\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}} = Z_1, \quad (5)$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  — компоненты напряжений;  $\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y$  и  $\dot{\gamma}_{xy}$  — компоненты скоростей деформаций. Следуя [4], имеем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \} &= \sigma (1 \pm \sin \rho \cos 2\psi) - k \operatorname{ctg} \rho; \\ \sigma_y \} & \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\tau_{xy} = \sigma \sin \rho \sin 2\psi;$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + k \operatorname{ctg} \rho; \\ \tau &= \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x \} &= \dot{\epsilon} \pm \dot{\gamma} \cos 2\psi; \quad \dot{\gamma}_{xy} = \dot{\gamma} \sin 2\psi; \\ \dot{\epsilon}_y \} & \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y); \quad \dot{\gamma} = \frac{1}{2} \sqrt{(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y)^2 + 4\dot{\gamma}_{xy}^2},$$

где  $\psi$  — угол между осью  $x$  и главной осью  $I$ . Отсюда

$$Z_1 = \operatorname{ctg} 2\psi.$$

Уравнение первого семейства линий скольжения [4] будет (рис. 2, б)

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \left( \psi + \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) = \frac{\cos \rho - Z_1 \sin \rho + \sqrt{1 + Z_1^2}}{\sin \rho + Z_1 \cos \rho}. \quad (9)$$

Окончательно получим уравнение рассматриваемого семейства линий скольжения или характеристик поля напряжений через скорости в следующем виде:

$$y = \int \frac{\left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \cos \rho - \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \sin \rho + \sqrt{\left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2}}{\left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \sin \rho + \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \cos \rho} dx. \quad (10)$$

Очевидно, что уравнения (4) и (10) различны. Авторы работ [5, 9] и др. трактовали линии, получающиеся при фотофиксации, как линии скольжения, т. е. линии, описываемые уравнением (10), в то время как их следует считать линиями, описываемыми уравнением (4). Проиллюстрируем сказанное примерами. Сначала рассмотрим плоскую деформацию грунтового параллелепипеда, грунт которого находится в состоянии предельного равновесия. Этот параллелепипед (рис. 3, а) деформируется таким образом, что верхнее сечение его смещается в рассматриваемый отрезок времени на величину  $u_x^0 = v_x^0 t$ , а поперечный размер увеличивается за это же время на  $2u_y^0$ . Поскольку ось  $x$  совпадает по направлению с наибольшим главным напряжением  $\sigma_1$ , то имеем  $\psi = 0$ . Линии скольжения, как известно [4], в данном случае составляют с осью  $x$  углы  $\pm \mu = \pm \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right)$ , причем верхний знак относится к первому семейству. Если предположить, что потенциал пластичности  $F$ , равный в предельном состоянии  $F=0$ , совпадает с условием прочности, т. е. исходить из того, как

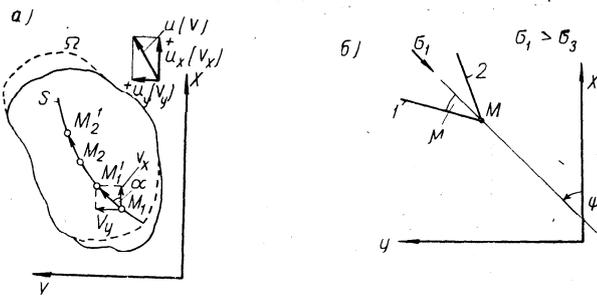


Рис. 2. Направления координатных осей

а — направления координатных осей и траектория перемещений  $S$ ; б — главная ось наибольшего напряжения  $\sigma_1$  и площадки скольжения; 1 и 2 — соответственно первое и второе семейства линий скольжения

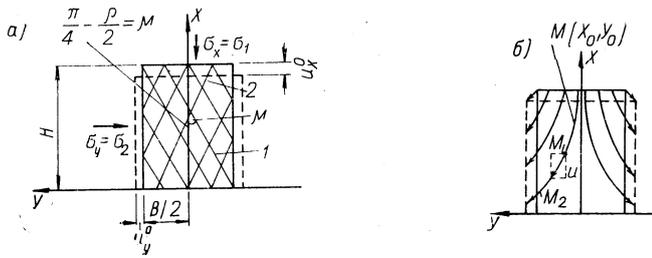


Рис. 3. Задача о сжимаемом предельно напряженном параллелепипеде  
 а — линии скольжения; б — траектории перемещений;  
 1 и 2 — то же, что и на рис. 2

принято в работах [6, 8]

$$F = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \sin \rho - k \cos \rho = \tau - \sigma \sin \rho, \quad (11)$$

то получим при  $\psi = 0$  и, следовательно,  $\tau_{xy} = 0$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} = \frac{\lambda}{2} (1 - \sin \rho); \\ \dot{\epsilon}_y &= \frac{\partial v_y}{\partial y} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} = -\frac{\lambda}{2} (1 + \sin \rho); \\ \dot{\gamma}_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \frac{\lambda}{2} \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где  $\lambda > 0$  — коэффициент пропорциональности. Из (12) для рассматриваемой задачи при граничных условиях

$$\begin{aligned} 1) \quad x = H; \quad 2) \quad x = 0; \quad 3) \quad y = 0; \\ v_x = v_x^0; \quad v_x = 0; \quad v_y = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

имеем

$$v_x = v_x^0 \frac{x}{H}; \quad v_y = -v_x^0 \frac{1 + \sin \rho}{1 - \sin \rho} \cdot \frac{y}{H}. \quad (14)$$

При принятии пластического потенциала в форме условия прочности получаем, что увеличение объема предельно напряженной сыпучей среды при сдвиге пропорционально  $\sin \rho$  [8]. Пластический потенциал определяет собой «дилатантность» среды — изменение ее объема при сдвиге.

Подстановка (14) в (10) дает уравнение первого семейства линий скольжения

$$y = x \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) + C = x \operatorname{tg} \mu + C. \quad (15)$$

Для траекторий из (3) имеем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(1 + \sin \rho)}{x(1 - \sin \rho)}. \quad (16)$$

Откуда

$$y = C_1 x^{\frac{1 + \sin \rho}{1 - \sin \rho}}. \quad (17)$$

Постоянная  $C_1$  определяется из условия, чтобы рассматриваемая кривая проходила через точку с координатами  $x_0, y_0$ , что дает

$$y = y_0 \left( \frac{x}{x_0} \right)^{\frac{1 + \sin \rho}{1 - \sin \rho}}, \quad (18)$$

т. е. уравнение семейства гипербол. Таким образом, на фотоснимке видны были бы гиперболы (18) (рис. 3, б), а не линии скольжения (15) (рис. 3, а), которые в данном случае не совпадают с траекториями.

Последнее хорошо подтверждается результатами экспериментов, проведенных Иосселин де Йонгом с помощью фотофиксации [11], который получил при съемке деформации

песчаного блока размером  $60 \times 60 \times 15$  см линии, весьма похожие на гиперболы.

Из теории пластического потенциала, принятого в форме условия прочности, следует, что дополнительная работа при движении по поверхности текучести идеально сыпучего грунта равна нулю [7]. Если вводится потенциал, описываемый зависимостью (11), то получим

$$\dot{\epsilon} = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y) = -\dot{\gamma} \sin \rho, \quad (19)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sqrt{(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y)^2 + 4\dot{\gamma}_{xy}^2}. \quad (20)$$

Пользуясь соотношениями (8), можно получить изменение скоростей деформации по любому направлению. Эти соотношения иллюстрируются диаграммой Мора, построенной для скоростей деформации (рис. 4), из которой видно, что вдоль линий скольжения отсутствует изменение скоростей деформаций ( $\dot{\epsilon}_n = 0$ ), а также, деформация расширения  $\dot{\epsilon}_3$  больше, чем абсолютная величина деформации сжатия  $\dot{\epsilon}_1$ , т. е.  $\dot{\epsilon} < 0$  и среда увеличивается в объеме [8].

Эксперименты с песком показывают [12], что наблюдаемая дилатансия обычно значительно меньше, чем следует из (19), причем она зависит от начальной пористости песка, увеличиваясь с ее уменьшением. Как известно, существует понятие критической пористости, близкой по значению к максимальной и при которой сдвиг происходит без изменения объема. Однако, если принять потенциал в форме (11), то отсутствию изменения при сдвиге объема отвечало бы нулевое значение угла внутреннего трения  $\rho$ . В связи с этим для случая плоской деформации (для пространственного случая вопрос о пластическом потенциале требует специального обсуждения) целесообразно пластический потенциал записать в следующем виде:

$$F_1 = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \sin(\rho - \rho^*) - k \operatorname{ctg} \rho \sin(\rho - \rho^*) = \tau - \sigma \sin(\rho - \rho^*), \quad (21)$$

где  $\rho^*$  — угол внутреннего трения, отвечающий состоянию критической пористости.

Тогда полученные ранее формулы (8), (12), (14), (16) — (18) сохраняются, если вместо  $\rho$  подставить в них  $\rho - \rho^*$ . Соответственно в диаграмме Мора для деформаций (см. рис. 4) вместо  $\rho$  следует подставить  $\rho - \rho^*$ . В этом случае скорости удлинения вдоль линий скольжения уже не будут равными нулю, как в случае пластического потенциала (11). Действительно, из (6), (7), (12), (21) и рис. 2, б получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_n}{\partial s_n} = \dot{\epsilon}_n &= \frac{\lambda}{2} [\cos 2\psi - \sin(\rho - \rho^*)]; \\ \psi &= \mp \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) = \mp \mu, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

или

$$\frac{\partial v_n}{\partial s_n} = \frac{\lambda}{2} [\sin \rho - \sin(\rho - \rho^*)]. \quad (23)$$

Нерастяжимыми оказываются линии, составляющие с осью  $l$  углы

$$\psi = \mp \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\rho - \rho^*}{2} \right). \quad (24)$$

Формула (23) определяет относительную деформацию вдоль

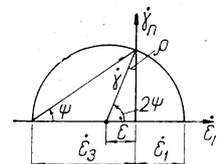


Рис. 4. Круг Мора для скоростей деформации;  $\psi = \mu = \pi/4 - \rho/2$

линии скольжения. Мощность диссипации механической энергии при потенциале (21) в предельном случае равна

$$D = \tau \dot{\gamma} + \sigma \dot{\epsilon} = \lambda \sigma [\sin \rho - \sin (\rho - \rho^*)] = \\ = \lambda \left\{ [\sin \rho - \sin (\rho - \rho^*)] \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \right. \\ \left. + k [\cos \rho - \sin (\rho - \rho^*) \operatorname{ctg} \rho] \right\}. \quad (25)$$

Следовательно, она является линейной функцией суммы главных напряжений и равна нулю лишь при  $\rho^* = 0$ .

Обратимся ко второй задаче — о движении предельно напряженного грунта по недеформируемой границе. Эта задача имеет непосредственное отношение к рассмотрению зоны максимального предельного состояния  $ABO$  — зоны Ренкина (см. рис. 1). Грунтовой клин будем считать смещающимся вдоль границы  $AB$  (рис. 5), которая является линией скольжения, а следовательно, оси  $x, y$  — главные. Оси  $x', y'$  направлены соответственно вдоль линии скольжения и в перпендикулярном ей направлении. По (22) имеем

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{x'} &= \frac{\partial v_{x'}}{\partial x'} = \frac{\lambda}{2} [\sin \rho - \sin (\rho - \rho^*)]; \quad \psi = \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}; \\ \dot{\epsilon}_{y'} &= \frac{\partial v_{y'}}{\partial y'} = -\frac{\lambda}{2} [\sin \rho + \sin (\rho - \rho^*)]; \quad \psi = \frac{3\pi}{4} - \frac{\rho}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Исходя из того, что

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_{x'} + \dot{\epsilon}_{y'}) = -\lambda \sin (\rho - \rho^*) = -\dot{\gamma} \sin (\rho - \rho^*) = \\ = -\frac{1}{2} \sqrt{(\dot{\epsilon}_{x'} - \dot{\epsilon}_{y'})^2 + 4 \dot{\gamma}_{x'y'}^2} \sin (\rho - \rho^*); \quad (27)$$

$$\dot{\gamma}_{x'y'} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_{x'}}{\partial y'} + \frac{\partial v_{y'}}{\partial x'} \right)$$

и принимая  $\frac{\partial v_{y'}}{\partial x'} = 0$  по [8], получаем

$$\dot{\gamma}_{x'y'} = \mp \lambda \cos \rho. \quad (28)$$

В дальнейшем воспользуемся в (28) нижним знаком. Интегрируя (26) — (28), получаем с учетом условий на границе [10]

$$\left. \begin{aligned} v_{x'} &= \lambda [\sin \rho - \sin (\rho - \rho^*)] x' - 2 \lambda y' \cos \rho + v_{x'}^0 / \cos \alpha; \\ v_{y'} &= -\lambda [\sin \rho + \sin (\rho - \rho^*)] y', \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

где  $v_{x'}^0$  — компонента скорости смещения начала координат ( $x=y=0$ ) вдоль оси  $x$ .

Переход к системе координат  $x, y$  осуществляется по формулам

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{x'} \cos \alpha - v_{y'} \sin \alpha; \quad x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha; \\ v_y &= v_{x'} \sin \alpha + v_{y'} \cos \alpha; \quad y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

и дает окончательно

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \lambda \{ [1 - \sin (\rho - \rho^*)] x - y \cos \rho \} + v_x^0; \\ v_y &= \lambda \{ x \cos \rho - y [1 + \sin (\rho - \rho^*)] \} + v_x^0 \operatorname{tg} \mu. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

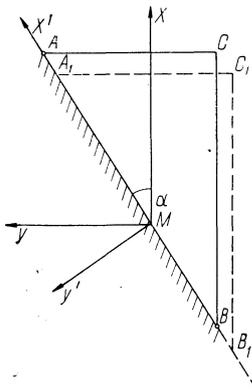


Рис. 5. Схема осей к рассмотрению задачи Ренкина. Угол  $\alpha = \mu = \pi/4 - \rho/2$

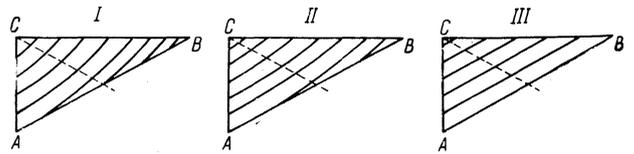


Рис. 6. Траектории перемещений частиц в зоне Ренкина (слева направо увеличивается влияние жесткого поступательного смещения вправо всей области)

Определим уравнение линий, которые фотографируются с помощью метода фотофиксации, для чего воспользуемся зависимостью (3)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} = \\ = \frac{\lambda (1 + \sin \rho) \left[ x - y \frac{1 + \sin (\rho - \rho^*)}{\cos \rho} \right] + v_x^0}{\lambda \{ x [1 - \sin (\rho - \rho^*)] - y \cos \rho \} + v_x^0} \operatorname{tg} \mu. \quad (32)$$

На линии скольжения  $AB$ , имеющей уравнение

$$y = x \operatorname{tg} \mu, \quad (33)$$

получаем из (32)

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{AB} = \operatorname{tg} \mu, \quad (34)$$

т. е. векторы направлены вдоль крайней линии скольжения, что и должно быть [10].

Уравнение (32) приводится к уравнению, интегрирующемуся с помощью разделения переменных. Интеграл его для  $\rho^* \neq 0$  следующий:

$$\frac{(x^2 + y^2) \cos \rho - 2xy - b(y - x \operatorname{tg} \mu) \cos \rho}{(x_0^2 + y_0^2) \cos \rho - 2x_0 y_0 - b(y_0 - x_0 \operatorname{tg} \mu) \cos \rho} - \\ - \left[ \frac{(y - x \operatorname{tg} \mu)(y_0 - x_0 \operatorname{ctg} \mu - b)}{(y_0 - x_0 \operatorname{tg} \mu)(y - x \operatorname{ctg} \mu - b)} \right]^{\frac{\sin (\rho - \rho^*)}{\sin \rho}} = 0, \quad (35)$$

где

$$b = \frac{v_x^0}{\lambda} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \rho}{\sin (\rho - \rho^*) - \sin \rho}; \quad (36)$$

$x_0, y_0$  — координаты точки, через которую проходит искомая траектория.

Случай  $\rho^* = 0$ , рассматривающийся в работах [8, 10], позволяет упростить уравнение (32) и получить

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{\rho^*=0} = \frac{\lambda \frac{(1 + \sin \rho)^2}{\cos \rho} (x \operatorname{tg} \mu - y) + v_x^0}{\lambda \cos \rho (x \operatorname{tg} \mu - y) + v_x^0} \operatorname{tg} \mu. \quad (37)$$

Интеграл этого уравнения

$$(1 + \sin \rho) (x - x_0) - (y - y_0) \cos \rho + \\ + \frac{v_x^0}{\lambda} \ln \frac{y - x \operatorname{tg} \mu}{y_0 - x_0 \operatorname{tg} \mu} = 0. \quad (38)$$

Таким образом, линии, представляемые зависимостями (35) и (38), — кривые, причем кривизна их зависит от дилатантности среды, а также от соотношения  $\lambda$  и  $v_x^0$ . В случае если принять  $\lambda = 0$  (недеформируемость среды), то получаем, что среда смещается вдоль линии  $AB$  как единое жесткое тело со скоростью  $v_x^0 / \cos \mu$ . Если в (37) положить

$$v_x^0 = 0, \text{ то получим } \left( \frac{dy}{dx} \right)_{\rho^*=0} = \operatorname{tg} (\mu + \rho), \quad \text{т. е.}$$

случай наклона векторов скоростей, разобранный Шилдом [8]. Чем больше первые слагаемые числителя и знаменателя в (32) и (37) по отношению к  $v_x^0$ , тем круче будут выходить на поверхность траектории перемещений. В зависимости от соотношения этих слагаемых могут быть получены различные

картины перемещений (рис. 6). Это соотношение определится из полного решения задачи о выпирании штампа.

Таким образом, искривление линий и выход их на поверхность в зоне Ренкина под более крутым углом в опытах объясняется не только и, пожалуй, не столько трением о стеклянную стенку экспериментального лотка, сколько тем, что траектория перемещений и площадка скольжения в одной и той же точке могут быть наклонены под различными углами к координатным осям.

При проводившемся здесь анализе считалось, что линия  $AB$  неподвижна относительно наблюдателя. Если же она смещается параллельно себе в ходе опыта или поворачивается, то результат будет отличаться от полученного здесь. Для того чтобы учесть этот эффект, следует в  $v_x$  и  $v_y$  в (31) ввести компоненты скоростей смещения линии  $AB$ .

Получив в опыте траектории перемещений и данные о величинах перемещений, представляется возможным, основываясь на приведенных выше зависимостях, построить и действительные линии скольжения.

Изложенные выше соображения позволяют записать по аналогии необходимые зависимости и для скоростей перемещений в полярных координатах.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Курдюмов. Краткий курс оснований и фундаментов. СПб, 1889.
2. В. И. Курдюмов. К вопросу о сопротивлении естественных оснований. Фотографический способ исследования процесса разрушения песчаного слоя под влиянием местной нагрузки. Вторая публичная лекция, прочитанная в зале Института инженеров путей сообщения 11 декабря 1889 г. СПб, Тип. Эрлих, 1891.
3. М. В. Малышев. Теоретические и экспериментальные исследования несущей способности песчаного основания. Изд. Водгео, 1953.
4. В. В. Соколовский. Статика сыпучей среды. Изд. 2-е, Гостехиздат, 1954.
5. Г. А. Гениев. Вопросы динамики сыпучей среды. Гостройиздат, 1958.
6. D. C. Drucker, W. Prager. Soil mechanics and plastic analysis or limit design. Quart. Appl. Math. 10, № 2, 1952.
7. Л. М. Качанов. Основы теории пластичности. «Наука», 1969.
8. R. T. Shield. Mixed boundary value problems in soil mechanics. Quarterly of Applied Mathematics. 11, № 1, 1953.
9. М. И. Горбунов-Посадов. Устойчивость фундаментов на песчаном основании. Гостройиздат, 1962.
10. Ю. И. Соловьев. О постановке и решении задачи устойчивости оснований фундаментов. «Труды к VII Международному конгрессу по механике грунтов и фундаментостроению». Стройиздат, 1969.
11. Josselin de Jong. Free discussion. Proceedings of the Geotechnical Conference Oslo 1967, vol. 2, p. 199.
12. А. С. Строганов. Метод прогноза конечных осадок оснований сооружений. Труды МЭИ, вып. XIX, 1956.