

## УСЛОВИЯ ПРОЧНОСТИ ПЕСЧАНЫХ ГРУНТОВ

М. В. МАЛЫШЕВ—А. Д. ФРАДИС  
НИИ ОСНОВАНИЙ И ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ  
МОСКВА, СССР

The Mohr—Coulomb strength criterion generally used does not take into account the effect of the intermediate principal stress. Experimental data in sands, however, show the angle of internal friction to depend on all three principal stresses. The paper presents a possible explanation for this problem.

Для определения предельного состояния грунта, как правило, используется условие прочности Мора—Кулона, по которому характеристиками прочности, а вернее параметрами диаграммы сдвига с прямолинейной огибающей предельных кругов служат угол внутреннего трения  $\varphi_M$  и сцепление  $C_M$ , в которое не входит промежуточное главное напряжение  $\sigma_2$ . Это условие записывается следующим образом:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3 + 2 C_M \cdot \cot \varphi_M} = \sin \varphi_M; \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (1)$$

Введем следующие обозначения.

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \mu = \frac{2\sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_3)}{\sigma_1 - \sigma_3}; \quad (2)$$

$$I_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

Через эти величины главные напряжения выражаются таким образом

$$\sigma_1 = \frac{I_1}{3} + \frac{3 - \mu}{\sqrt{3(3 + \mu^2)}} \sqrt{I_2}; \sigma_2 = \frac{I_1}{3} + \frac{2\mu}{\sqrt{3(3 + \mu^2)}} \sqrt{I_2}; \quad (3)$$

$$\sigma_3 = \frac{I_1}{3} - \frac{3 + \mu}{\sqrt{3(3 + \mu^2)}} \sqrt{I_2}.$$

Условие (1) после преобразования принимает следующий вид:

$$\frac{3(3 + \mu \sin \varphi_M)}{\sqrt{3(3 + \mu^2)} \cdot \sin \varphi_M} \sqrt{I_2} - I_1 = 3 C_M \cot \varphi_M. \quad (4)$$

Наряду с этим общеизвестным условием прочности позднее были предложены и другие условия, среди которых условие Губера—Боткина [1]

$$\frac{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi_0)}{2 \cdot \sin \varphi_0} \sqrt{I_2} - I_1 = 3 C_0 \cot \varphi_0, \quad (5)$$

где  $\varphi_0$  и  $C_0$  — характеристики, по смыслу аналогичные характеристикам условия (1). Экспериментальная проверка условия прочности должна осуществляться при различных значениях  $\mu$ . Как видно из (4) и (5), в первое  $\mu$  входит, а во второе нет. Поскольку условие (5), как будет показано далее, для грунтов экспериментально не подтверждается, то впоследствии были предложены другие условия прочности М. В. Малышевым [2], Г. М. Ломизе—А. Л. Крыжановским [3] и Г. А. Гениевым [4] и другими. В первом и последнем из названных условий связь между  $\sqrt{I_2}$  и  $I_1$ , как и в зависимостях (4) и (5) линейная, в то время как в условии Ломизе—Крыжановского она нелинейна, в связи с чем оно далее не рассматривается.

Условие Малышева [2] в принятых здесь обозначениях имеет вид:

$$\sqrt{I_2} \frac{3}{\sqrt{3}(3 + \mu^2) \cdot \sin \varphi_0} \left[ 3 + \mu \cdot \sin \varphi_0 - \frac{3(1 - X)(1 - \mu^2)}{4} \right] - I_1 = 3 C_0 \cot \varphi_0, \quad (6)$$

где  $X$  — дополнительный опытный параметр. К такому же виду можно привести условие прочности Гениева [4]

$$\sqrt{I_2} \frac{\sqrt{3}(9 - \sin^2 \varphi_0)}{2 \cdot \sin \varphi_0 \left[ 3 - \sin \varphi_0 \frac{\mu(9 - \mu^2)}{(3 + \mu^2)^{3/2}} \right]} - I_1 = 3 C_0 \cot \varphi_0. \quad (7)$$

В формулах (5), (6) и (7)  $\varphi_0$  — угол внутреннего трения, подсчитанный по условию (1) или (4) в предположении, что  $\sigma_2 = \sigma_3$ . Таким образом  $\varphi_0 = \varphi_M$  и  $C_0 = C_M$  только когда  $\mu = -1$ . В остальных случаях  $\varphi_M > \varphi_0$  и  $C_M > C_0$  кроме условия  $\mu = +1$ , когда при использовании зависимостей (6) и (7)  $\varphi_M = \varphi_0$ . Приравнявая [5] тождественно коэффициенты при  $I_2$  в выражениях (4) и последовательно (5), (6), (7), получаем зависимости  $\varphi_M = \varphi_M(\varphi_0, \mu)$ , которые указывают на то, как изменяется приведенное к условию прочности Мора значение угла внутреннего трения  $\varphi_M$  от  $\mu$ .

Имея зависимость  $\varphi_M(\varphi_0, \mu)$  и приравнявая тождественно правые части выражений (4) и последовательно (5), (6) или (7), получим вторую искомую функцию  $C_M = C_0 \tan \varphi_M \cot \varphi_0$ . Смысл такого приравнивания заключается в следующем. Теория предельного равновесия сыпучей среды

получила свое значительное развитие для плоской [6] и осесимметричной [7] задач и в основе ее лежит условие прочности (1). Однако эксперименты указывают на то, что угол внутреннего трения зависит от вида напряженного состояния, то-есть параметра  $\mu$ , другими словами от промежуточного главного напряжения  $\sigma_2$ . Поэтому, если определение угла внутреннего трения и сцепления проводится при том же виде напряженного состояния, при котором они будут использоваться в расчетах, то-есть  $\mu$  в опыте и расчете одинаково, то полученные значения могут непосредственно использоваться в этом расчете. Если же определение производится не при том значении  $\mu$ , при котором будет производиться расчет, например определение  $\varphi_M$  проводится на трехосном приборе, а расчет будет проводиться в условиях плоской деформации, то требуется значение  $\varphi_M$  пересчитать для условий плоской деформации. И обратно, если  $\varphi_M$  определено в условиях плоской деформации, а расчет будет вестись в условиях осесимметричного напряженного состояния, то также требуется произвести пересчет. В дальнейшем мы рассмотрим, в целях упрощения, грунт, лишенный сцепления, хотя все рассуждения останутся справедливыми и применительно к грунту, им обладающему. Следует заметить, что относительное влияние той поправки, которую приходится вводить в зависимости от  $\mu$ , к углу внутреннего трения значительно больше, чем к сцеплению. Положим, что

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} = Z; \quad \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = \frac{1 - Z}{1 + Z}; \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1 + \mu Z}{1 + Z}. \quad (8)$$

Далее, если выбрать параметры прочности таким образом, чтобы все условия имели одно и то же значение предельных напряжений в случае трехосного сжатия ( $\mu = -1$ ), причем в этой точке считать, что будем иметь  $Z = Z_0$ , то после преобразований из условий (5), (6), (7) и (1) последовательно

$$\sin \varphi_M = Z = \frac{6 Z_0}{(3 - Z_0) \sqrt{3 + \mu^2} - 2 \mu Z_0}; \quad (9)$$

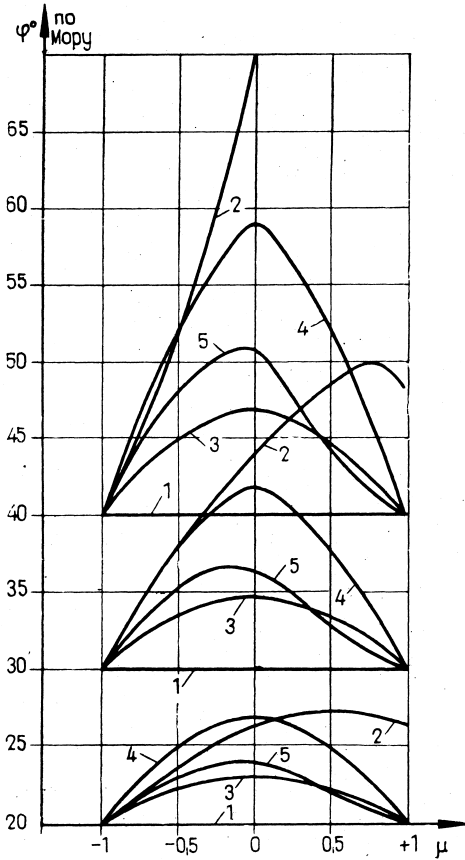
$$\sin \varphi_M = Z = \frac{4 Z_0}{4 - (1 - X)(1 - \mu^2)}; \quad (10)$$

$$\sin \varphi_M = Z = \frac{6 Z_0 [3(3 + \mu^2)^{3/2} - Z_0 \mu(9 - \mu^2)]}{(3 + \mu^2)^2(9 - Z_0^2) - 2 \mu Z_0 [3(3 + \mu^2)^{3/2} - Z_0 \mu(9 - \mu^2)]}; \quad (11)$$

$$\sin \varphi_M = Z = Z_0 = \sin \varphi_0. \quad (12)$$

На фиг. 1 даны для иллюстрации кривые, построенные по зависимостям (9)–(12) при нескольких значениях  $Z_0$ , соответствующих разным углам

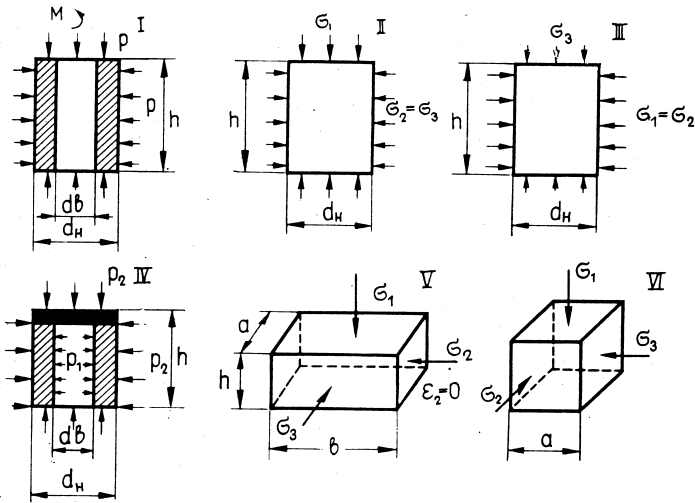
трения по Мору. Поскольку зависимость (10) обладает дополнительным параметром  $X$ , то она дается при нескольких значениях  $X$ . При  $X = 1$  она совпадает с зависимостью (12). Так как параметр  $X$  является опытным, то естественно, что зависимость (10) является более гибкой.



Фиг. 1. Теоретические зависимости угла внутреннего трения  $\varphi_M$  по Мору от параметра  $\mu$ . 1. Мор и Малышев при  $X = 1$ , 2. Губер—Мизес, 3. Малышев при  $X = 0,5$ , 4. Малышев при  $X = 0$ , 5. Гениев

Для того, чтобы определить, какое из приведенных условий прочности наиболее правильно, следует обратиться к экспериментальным данным, которых не так много. Эксперименты, которые могут ответить на этот вопрос, должны быть проведены с одним и тем же грунтом, но при различных значениях  $\mu$ . Как показывают теоретические исследования, чем менее абсолютное значение  $\varphi_M$ , тем менее влияние  $\mu$  на его изменение. Поэтому для глинистых грунтов вопрос использования той или иной теории прочности имеет меньшее значение, а при экспериментальной проверке этих условий погрешность в

опытах может быть того же порядка, что и изменения угла внутреннего трения в зависимости от  $\mu$ . В песчаных грунтах влияние  $\mu$  на  $\varphi_M$  значительно большее и, поэтому, естественно обратиться к экспериментам, проведенным с ними. В таблице I приведены основные данные по тем экспериментам, которые имеются в литературе, а схемы испытаний, обозначенные в этой таблице цифрами, приведены на фиг. 2. В эту таблицу не включены результаты опытов П. Хабиба—М. Пельтье [9], так как они привели к взаимно



Фиг. 2. Схемы испытаний образцов в экспериментах (см. табл. I)

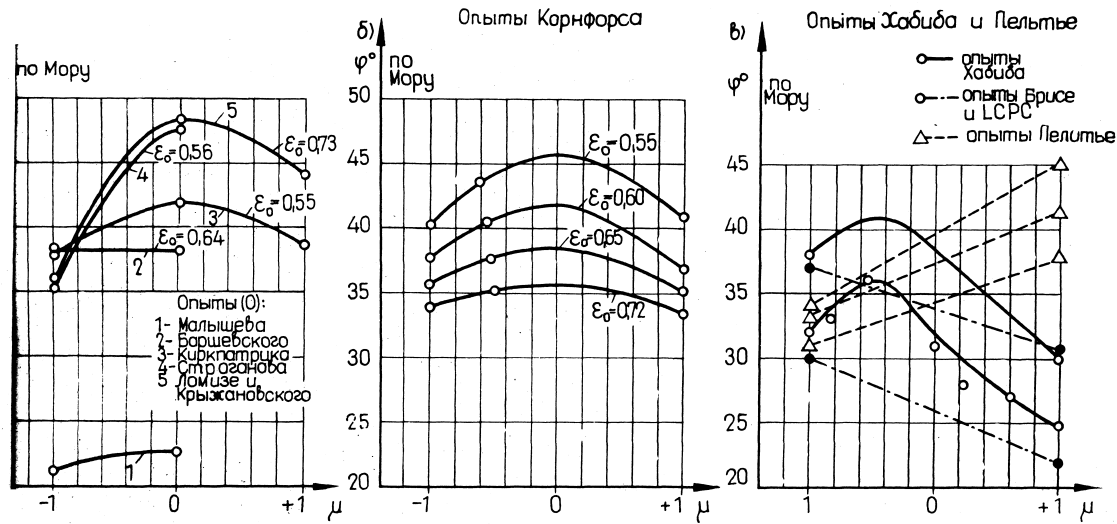
противоречивым результатам и, по всей вероятности, это противоречие может быть объяснено несовершенством примененной аппаратуры. А. Бишоп [9] привел график сопоставления величин углов внутреннего трения, полученных рядом экспериментаторов при значениях параметра  $\mu = -1$  и  $\mu = +1$ , из которого следует совпадаемость значений  $\varphi_M$  при этих двух различных видах напряженного состояния. На фиг. 3 даны графики экспериментальных зависимостей  $\varphi_M(\mu)$ , построенных по данным различных исследователей. Основные условия экспериментирования ясны из табл. I.

Разными экспериментаторами применены различные приборы и методика проведения опытов, а также исследовались разные виды песков. Поэтому результаты несколько отличаются между собой количественно, однако все они свидетельствуют о существующей закономерности в части изменения угла  $\varphi_M$  от  $\mu$ . К сожалению, эксперименты проводились чаще всего только при двух и очень редко при трех значениях  $\mu$ . Нами проведены специальные эксперименты при пяти различных значениях  $\mu$  и в условиях плоской деформации. Прибор, использовавшийся при проведении этих экспериментов,

Таблица I

Автор, год публикации, ссылка на литературу	Схема испытания	$\mu$	Образец					Материал		
			Форма	Размеры, мм					наименование	коэф. пористости
				$d_b$	$c_H$	$h$	$a$	$b$		
Б. Н. Баршевский [8]	I	0	труба цилиндр	145	180	90	—	—	песок средней крупности	0,64
	II	-1		—	60	150	—	—		
У. Киркпатрик [10]	II	-1	цилиндр цилиндр труба	63	102	152	—	—	песок средней крупности	0,55
	III	+1								
	IV	0								
М. В. Малышев [2]	I	0	труба цилиндр	50	90	60	—	—	металлическая дробь	0,6
	II	-1		—	50	150	—	—		
Д. Корнфорс [11]	V	плоск. деф.	параллелепипед цилиндр цилиндр	—	—	102	51	407	песок средн. крупности	от 0,50 до 0,75
	II	-1		102						
	III	+1								
А. С. Строганов [12]	I	0	труба цилиндр	—	—	—	—	—	мелкий кварцевый песок	0,56
	II	1								
Г. М. Ломизе—А. Л. Кръжановский [3]	VI	-1	куб	—	—	—	71	—	пылеватый мелкий песок	0,73
		0								
М. В. Малышев—А. Д. Фрадис	VI	-1 -0,5 0 +0,5 +1,0 плоск. деф.	куб	—	—	—	150	—	песок средней крупности	0,495

позволял изменять независимо все три главные напряжения и тем самым варьировать  $\mu$  от  $-1$  до  $+1$ . Все стенки камеры, имевшей форму куба  $15 \times 15 \times 15$  см, были жесткими и подвижными и скреплялись с домкратами. Перемещение стенок устанавливалось с помощью индикаторов. Для уменьшения трения грунта по стенкам они покрывались фторопластом. Каждый домкрат имел воздушный компенсатор для поддержания постоянства давления. Этот прибор давал возможность производить эксперименты в условиях

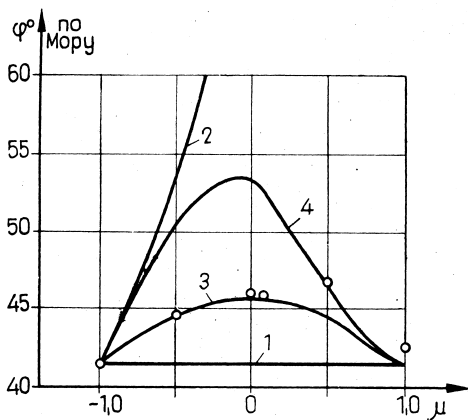


Фиг. 3. Экспериментальные зависимости угла внутреннего трения по Мору от параметра  $\mu$

плоской деформации, для чего в направлении промежуточного главного напряжения домкрат заменялся упором, на который через месдозу опиралась стенка камеры. Образец заключался в резиновую оболочку толщиной  $0,15$  мм, смазываемую кремнеорганической смазкой. В опытах сначала создавалось гидростатическое давление, а затем при постоянной величине  $I_1$ , увеличивалось  $I_2$  при постоянстве  $\mu$ . опыты в условиях плоской деформации проводились при постоянстве  $\sigma_3$  и увеличивавшемся до разрушения  $\sigma_1$ . Испытания проводились с воздушно-сухим песком средней крупности (частиц крупнее  $0,25$  мм —  $78\%$ ), имевшим объемный вес  $1,76-1,78$  г/см<sup>3</sup>. Результаты этих экспериментов представлены на фиг. 4, где также даны и теоретические кривые, построенные по условиям (9)–(12).

Рассмотрение всех полученных результатов сводится к следующему: 1. в сыпучем грунте, как показывают опыты, наблюдается изменение угла внутреннего трения и сцепления, если их рассчитывать по Мору, в зависимости от того промежуточного главного напряжения, при котором велись

испытания; 2. это увеличение угла внутреннего трения с изменением  $\mu$  значительно меньше, чем то следует из теории прочности Губера—Боткина; 3. наилучшее приближение к эксперименту можно получить, если в условие прочности вводить дополнительный параметр, определяемый опытным путем; 4. в расчетах по теории предельного равновесия сыпучей среды, основанной на использовании условия прочности Мора, следует принимать либо непосредственно то значение угла внутреннего трения, которое получено в опыте



Фиг. 4. Зависимость угла внутреннего трения по Мору от параметра  $\mu$  по опытам авторов и теоретические кривые: 1. Мор. — 2. Губер—Боткин. — 3. Малышев ( $X = 0,705$ ). — 4. Гениев

при том же виде напряженного состояния, что и в расчете (например плоская деформация — плоская деформация или осесимметричная задача — трехосное сжатие), либо производить пересчет по формулам от опытного вида напряженного состояния к расчетному; 5. при таком подходе все разработки теории предельного равновесия, выполненные применительно к условию прочности Мора, сохраняют свою силу.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Боткин, А. И.: О прочности сыпучих и хрупких материалов «Известия НИИГ», т. 26, 1940
2. Малышев, М. В.: О влиянии среднего главного напряжения на прочность грунта и о поверхностях скольжения. «Основания, фундаменты и механика грунтов», № 1, 1963
3. Ломизе, Г. М. — Крыжановский, А. Л.: Основные зависимости напряженного состояния и прочность песчаных грунтов. «Основания, фундаменты и механика грунтов», № 3, 1966
4. Гениев, Г. А.: К вопросу обобщения условия предельного равновесия сыпучей среды. «Основания, фундаменты и механика грунтов», № 2, 1968
5. Малышев, М. В.: Об определении угла внутреннего трения и сцепления предельно-напряженной сыпучей среды. Известия АН СССР, ОТН, № 7, 1954
6. Соколевский, В. В.: Статика сыпучей среды. Гостехиздат, 1960. (Изд. 3-е)



7. Березанцев, В. Г. Осесимметричная задача теории предельного равновесия сыпучей среды. Гостехиздат, 1953
8. Баршевский, Б. Н.: О гипотезе прочности несвязного грунта. Известия АН СССР, ОТН № 4, 1956
9. BISHOP, A. W.: The Strength of Soils as Engineering Materials. *Geotechnique* (1966)
10. КИРКРАТРИК, W. M.: The Condition of Failure for Sands. *Proc. 4th Intern. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng.* 1 (1957)
11. CORNFORTH, D. H.: Some Experiments on the Influence of Strain Conditions on the Strength of Sand. *Geotechnique*, No. 2 (1964)
12. STROGANOV, A. S.: *Proc. of the 6-th Intern. Conference on Soil Mech. and Found. Eng.* 3 (1965)

### Резюме

Общеприменяемая теория Мора—Кулона, касающаяся сопротивления сдвигу, не принимает во внимание действие промежуточного главного напряжения. Однако, опытные данные по песчаным грунтам показывают, что угол внутреннего трения зависит от всех главных напряжений. Работа дает приемлемое объяснение по данному вопросу.